

A constituição de uma teoria das proporções na Geometria de 1637: demonstrações geométricas versus construções de curvas mecânicas em Descartes

José Portugal dos Santos Ramos

Professor Doutor na Universidade Estadual de Feira de Santana

E-mail: domluso@gmail.com

Recebido em: 06/08/2015.

Aprovado em: 16/04/2016

Resumo: A teoria das proporções de Descartes expressa a sistematização matemática do modus operandi do seu método. Tal teoria, portanto, permite Descartes realizar na Geometria de 1637 a demonstração analítica ou sintética do movimento de figuras a partir de determinados lugares e propriedades geométricas previamente conhecidas por uma análise especificamente algébrica. Na mencionada obra de 1637, Descartes identifica quais são os problemas de Geometria, a saber, os problemas planos, sólidos e lineares. Na sequência, como mostraremos neste artigo, ele distingue dois tipos de construções, a saber, as construções geométricas e as construções mecânicas. No desdobramento deste raciocínio, Descartes identifica os lugares geométricos a partir da análise de retas, círculos e das secções cônicas: parábola, hipérbole e elipse. Para ele, esses lugares são concebidos algebricamente, o que lhe evidencia a exatidão da razão. A partir da inteligibilidade algébrica desses lugares geométricos, ele explica a determinação de propriedades analíticas mediante as construções da concóide e explica a identificação dos pontos por meio da construção das ovas. Assinala-se que tais construções são efetuadas por movimentos regulares, revelando, assim, a aplicação da sua teoria das proporções. Todavia, as construções mecânicas, tais como a espiral e a quadratriz, são propostas por Descartes de maneira diferente, pois elas requerem o uso da imaginação ao prescrevem um movimento infinito. Diante disso, explicaremos no presente artigo como ele constata que uma plena investigação analítica é comprometida, mas admite a possibilidade de mensurar, em alguns casos, uma regularidade constante em tal movimento mediante os raciocínios de sua teoria das proporções.

Palavras-chave: Descartes. Teoria das Proporções. Geometria. Exatidão. Mecânica.

The constitution of a theory of proportions in Geometry of 1637: geometric demonstrations versus constructions of mechanical curves in Descartes

Abstract: The theory of proportions of Descartes is mathematics systematization of the modus operandi of his method. This theory therefore allows Descartes to hold, in 1637 Geometry, the analytical or synthetic demonstration or synthetic of the movement of figures from certain locations and geometric properties previously known by a particular algebraic analysis. In the aforementioned work of 1637, Descartes identifies what the geometry problems are, namely the plane, solid and linear problems. Further, as we will show in this article, we distinguish two types of construction, namely the geometric and mechanical constructions. In the unfolding of this reasoning, Descartes identifies loci from the straight analysis, circles and conic sections: parabola, hyperbole and ellipse. For him, these places are designed algebraically, which shows you the accuracy of reason. From the algebraic intelligibility of these loci, he explains the determination of the analytical properties through the conchoid constructions and the identification of points by means of oval constructions. It is noted that such constructions are made by regular movements, revealing thus the application of his theory of proportions. However, the mechanical construction, such as the spiral and quadrat are proposed by Descartes differently because they require the use of imagination to prescribe an infinite movement. Therefore, we will explain in this article how he perceives a full analytical research is compromised, but admits the possibility of measuring, in some cases, a constant regularity in such a move by the arguments of his theory of proportion.

Keywords: Descartes. Theory of proportion. Geometry. Exactitude. Mechanics.

A Geometria foi publicada em 1637, acompanhando o Discurso do Método. Tal obra é constituída por três Livros: o primeiro trata dos “problemas que podem ser construídos ao se utilizar apenas círculos e linhas retas”; o segundo explica “a natureza das curvas”; e o terceiro trata da construção de “problemas sólidos e hipersólidos”. Neste artigo, dedicarei atenção à explicação cartesiana acerca da natureza das curvas.

A Geometria¹ é um ensaio que esclarece a dimensão do espírito lógico-matemático do método de Descartes.² Embora seja um dos três ensaios que seguem o Discurso do método, a obra em muito se diferencia do texto do Discurso. Isso porque a exposição

da Geometria é estabelecida apenas em articulações de questões matemáticas. Sustento, pois, que A Geometria, a despeito de sua aridez argumentativa, revela como Descartes concebe uma teoria das proporções inovadora a partir dos raciocínios de “ordem e medida”. Nesta perspectiva, defendo que a lógica matemática de Descartes é tomada como o modo de raciocínio que possibilita o acesso de juízos claros e evidentes. Descartes ressalta na obra que os raciocínios matemáticos vão além daquilo que define o objeto dos geômetras como postulados, axiomas e teoremas. Por isso, a aplicabilidade das operações matemáticas extrapola a natureza mesma do objeto dos geômetras.

A teoria das proporções de Descartes é a sistematização matemática do *modus operandi* do seu método. Tal teoria, portanto, permite a Descartes a demonstração analítica ou sintética do movimento de figuras a partir de determinados lugares e propriedades geométricas previamente conhecidas por uma análise especificamente algébrica. Nesta perspectiva, Descartes (1996, p. 388-390) relata o seguinte na Geometria:

Os antigos distinguiram bem que entre os problemas de Geometria, uns são planos, outros sólidos e outros lineares. Isso quer dizer que uns podem ser construídos sem traçar mais que linhas retas e círculos, enquanto que outros não podem sê-lo se não se empregar pelo menos alguma secção cônica; e outros, por fim, apenas empregando alguma linha mais composta. Mas não deixa de entranhar-se que, apesar disso, não tenha conseguido distinguir diversos graus entre as linhas mais compostas, e não compreender porque as denominaram mecânicas de preferência a geométricas; pois dizer que a causa é ter de servir-se de alguma máquina para traçá-las tornaria necessário incluir também nelas os círculos e as retas, uma vez que para traçá-las sobre o papel se requer um compasso e uma régua, que podem também ser consideradas máquinas. Mas tão pouco se deve a que os instrumentos que servem para traçá-las, por serem mais complicados que a régua e o compasso, sejam menos exatos, pois seria necessário por esta razão eliminá-los da mecânica, onde a exatidão dos trabalhos que produz é mais necessária que em Geometria, donde apenas é a exatidão do raciocínio o que se busca, e que pode, sem dúvida, ser tão perfeito com respeito a estas linhas, como a respeito das outras. [...] É certo que eles não admitiram inteiramente as secções cônicas em sua Geometria, e eu não tratarei de alterar os nomes que foram aprovados pelo uso; porém, é muito claro, me parece, que

tomando, como se sabe, por geométrico o que é preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e considerando a geometria como uma ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, não se devem excluir as linhas por mais compostas que sejam, enquanto se possa imaginá-las descritas por um movimento contínuo, ou por vários movimentos regulares que se sucedem, e que os últimos estão inteiramente regidos pelos que os precedem; pois por este meio se pode sempre ter um conhecimento exato de sua medida. Mas talvez o que tenha impedido aos antigos geômetras de admitir aquelas linhas que eram mais compostas que as secções cônicas, foram considerar, em primeiro lugar, a espiral, a quadratriz e outras semelhantes, que apenas pertencem verdadeiramente, às mecânicas e não ao número das que penso admitir aqui, em virtude de poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que se possa medir exatamente. E no caso daqueles que examinaram a cissóide e a concóide e outras poucas outras, como não estudaram com profundidade as suas propriedades, não lhes deram mais importância que às primeiras. Ou ainda, vendo eles o pouco que conheciam sobre as secções cônicas e o muito que ainda faltava conhecer sobre o que se pode fazer com a régua e o compasso, os quais eles ignoravam, por crer que não deviam adentrar em matérias mais difíceis. Mas, como espero que no futuro, os que tenham habilidade para servir-se do cálculo geométrico aqui proposto, não terão motivo para deter-se em problemas planos ou sólidos; assim acredito que é indicado que os convide a realizar outras investigações onde não lhes faltará nunca um exercício.

Nesta explicação, Descartes estabelece a gênese do Livro II da Geometria: a ordem dos problemas e de suas respectivas soluções. Primeiramente, Descartes identifica quais são os problemas de Geometria, a saber, os problemas planos, sólidos e lineares. Na sequência, ele distingue dois tipos de construções, a saber, as construções geométricas e as construções mecânicas. No desdobramento desta explicação, Descartes identifica os lugares geométricos a partir da análise de retas, círculos e das secções cônicas: parábola, hipérbole e elipse. Para ele, esses lugares são concebidos algebricamente, o que lhe evidencia a exatidão da razão. A partir da inteligibilidade algébrica destes lugares geométricos, ele explica a determinação de propriedades analíticas mediante as construções da concóide e explica a identificação dos pontos por meio da construção das ovas. Assinala-se, que

tais construções são efetuadas por movimentos regulares, revelando, assim, a aplicação da sua teoria das proporções. Todavia, as construções mecânicas, tais como a espiral e a quadratriz, são propostas por Descartes de maneira diferente, pois elas requerem o uso da imaginação ao prescrevem um movimento infinito. Diante disso, ele constata que uma plena investigação analítica é comprometida, mas admite a possibilidade de mensurar, em alguns casos, uma regularidade constante em tal movimento mediante os raciocínios de sua teoria das proporções

1 A explicação dos problemas de Geometria

Descartes explica os problemas de Geometria mediante a análise dos lugares planos e sólidos. Para isso, ele utiliza o primeiro gênero das linhas curvas, o que lhe permite determinar propriedades e pontos oriundos da análise algébrica de retas, círculos e das secções cônicas. Isso mostra que a inteligibilidade dos problemas de Geometria é concebida pelo critério de construtibilidade fundamentado em uma razão analítica. Cabe ressaltar ainda que tais propriedades e pontos possibilitam a Descartes determinar movimentos mais compostos, tais como na resolução dos problemas lineares. Descartes (1996, p. 406-407):

Como as equações que não chegam mais que ao quadrado [...], não apenas o problema dos antigos, com 3 ou 4 linhas, está aqui inteiramente concluído, senão também todo aquele que pertence ao que eles chamavam de composição dos lugares sólidos, e, por conseguinte também aos lugares planos, em virtude destes se compreenderem nos sólidos. Tais lugares não são outra coisa que os que resultam quando, tratando de encontrar algum ponto a que falta uma condição para estar completamente determinado, assim como ocorre no exemplo, em que todos os pontos de uma mesma linha podem ser tomados pelo que se busca. E se esta linha é reta ou circular, denominamos de um lugar plano. Mas se é uma parábola ou uma hipérbole, ou uma elipse, denominamos um lugar sólido. [...] E se a linha que determina o ponto buscado é de um grau mais composto que as secções cônicas, pode-se designar, de igual modo, como um lugar supersólido; e, assim para os outros. Se faltarem duas condições para determinação do ponto, o lugar sobre o qual se encontra é uma superfície, que pode ser, como anteriormente, ou plana, ou esférica ou ainda mais composta [complexa].¹

2 As curvas mecânicas

Os problemas lineares dizem respeito a diversas construções matemáticas, tais como as construções da cissóide, da concóide, da espiral e da quadratriz¹. Os antigos geômetras identificaram essas construções em um mesmo bloco de classificação, entretanto, Descartes fez distinção entre aquelas que as designou de geométricas, como a cissóide e a concóide, e as outras que as designou de mecânicas, tais como a espiral e a quadratriz².

No Livro II da Geometria, Descartes estabelece quais são os problemas lineares, e a partir disso, demarca a diferenciação que há entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Descartes (1996) entende “por geométrico o que é preciso e exato, e por mecânico o que não é.”

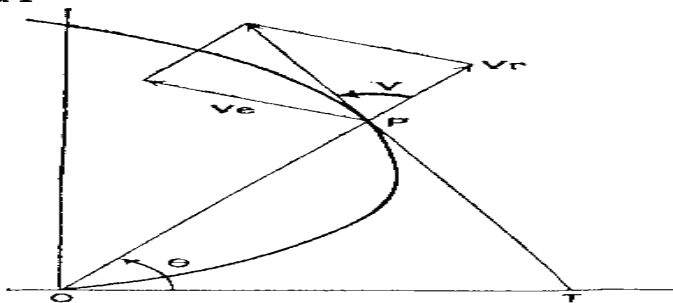
Segundo Descartes (1902, p. 389), o que possivelmente impediu os antigos geômetras em admitirem as linhas que eram mais compostas que as secções cônicas: “[...] foi considerar, em primeiro lugar, a espiral, a quadratriz e outras curvas semelhantes, as quais apenas pertencem verdadeiramente às mecânicas [...] em virtude de poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que se possa medir exatamente”. Segue Descartes:

Devo assinalar também que há uma grande diferença entre esta maneira de encontrar vários pontos para traçar uma linha curva [por exemplo, a cissóide e a concóide] e a que se emprega para a espiral e suas semelhantes [por exemplo, a quadratriz] pois, para esta última, não se obtém indiferentemente todos os seus pontos, mas apenas aqueles que podem ser determinados por um processo mais simples que o requerido para formulá-la; assim, pois, não se encontra nenhum dos seus pontos, isto é, dos que lhe são próprios. (DESCARTES. 1996, p. 411-412).

Vuillemin, todavia, defende uma importante diferenciação epistemológica entre “curva mecânica” e “movimento mecânico”. Segundo Vuillemin, Descartes, assim como Arquimedes, consegue compreender o movimento mecânico da espiral por meio dos cálculos dos logaritmos. Segue a exposição feita por Vuillemin para tratar deste assunto. Arquimedes define a espiral como “o lugar

de um ponto que se move com uma velocidade radial uniforme no comprimento de uma meia volta". Constatase, pois, que essa curva roda em um movimento uniforme em torno de sua extremidade fixa³. A propósito da construção da tangente, a espiral de Arquimedes requer não apenas a ideia de uma construção cinemática da curva, mas também, o teorema da composição das velocidades que seguem a diagonal do paralelogramo. Arquimedes, assim, determina a tangente da espiral $\rho = \alpha\theta$, calculando a direção instantânea do movimento do ponto P, pela qual essa curva é traçada (FIGURA 1). O movimento de P pode ser decomposto em dois movimentos. O primeiro movimento constitui a velocidade radial V_r da grandeza constante, pela qual é dirigida ao longo da linha OP. O segundo movimento constitui a direção perpendicular da linha OP. Tal grandeza é dada pelo produto variável V_e da distância OP a partir da velocidade uniforme da rotação. Quando as velocidades e a distância OP são dadas é construído o paralelogramo das velocidades, e, diante disso é determinado a tangente TP na direção que expressa a velocidade (VUILLEMIN, 1960).

Figura 1



Fonte: VUILLEMIN, 1960, p. 39.

A construção de Descartes e, que também se encontra em Torricelli, prescreve três questões, a saber¹: (1) o modo dessa exposição em um primeiro momento não é mais que a generalização da formulação de Arquimedes². (2) Coordenando os polos, a equação da espiral logarítmica expressa: $\rho = a\lambda\theta$, pela qual também é expressa: $\rho = ae^{\gamma\theta}$. (3) Para obter esta última expressão é suficiente calcular $\lambda = e\gamma$. A partir destas três determinações é possível conceber a quantidade que representa o raio uniforme quando esse se volta

do ângulo uniforme com o crescimento correspondente à taxa logarítmica uniforme⁴. Inicialmente coloca-se e^γ representando o resultado da rotação do raio uniforme através da taxa logarítmica uniforme. Na sequência identifica-se que o ângulo percorrido é igual a γ . O resultado da rotação uniforme determina a taxa logarítmica γ . Nota-se, assim, que a circunferência (por $\gamma = 0$) e a reta (por $\gamma = \alpha$) são os casos particulares dessa curva. O cálculo do ângulo V faz o raio vetor com uma propriedade analítica, a saber, a tangente. Tal propriedade mostra que neste ângulo há um valor constante. Nota-se, portanto, a equação:

$$\operatorname{tg} V = \rho/\rho' = ae\gamma\theta/d/d\theta. (ae\gamma\theta) = ae\gamma\theta / ae\gamma\theta. \gamma = 1/\gamma = \text{constante}^5.$$

Constata-se que a quantidade correspondente dentro da espiral de Arquimedes é igual ao ângulo variável. Por isso, Descartes admite que os valores da velocidade relativa e da velocidade da movimentação que correspondem àquelas que determinaram o paralelogramo das velocidades dentro da espiral aritmética de Arquimedes são constituídos dentro da espiral mecânica. Ressalta ainda que essa demonstração decorre do cálculo da tangente (cálculo que requisita uma equação algébrica). Para isso, Descartes formulara a seguinte equação:

$$V_r = b\rho = \frac{d\rho}{dt} \text{ e } V_e = \rho\omega, \text{ com } \omega = \frac{d\theta}{dt} = c (\theta = ct). \\ \text{Com isso: } V_r = b, \text{ e } V_e = \rho\omega.$$

Apenas falta integrar a primeira dessas quantidades para encontrar a equação polar da curva. A construção cinemática da espiral de Descartes é definida pelo lugar de um ponto que se move sobre um raio vetorial através de uma velocidade proporcional à distância do polo ($V_r = b\rho$), ou seja, o raio vetorial é envolvido a partir de uma rotação angular uniforme (ω) em torno de um destes pontos identificados como polos¹.

Numa carta enviada a Morin, datada em 12 de setembro de 1638, Descartes identifica as duas principais propriedades da espiral logarítmica. Descartes:

Mas, essa espiral tem diversas propriedades que a tornam facil-

mente reconhecidas. Ora, se A é o centro da terra e que ANBCD é a espiral, havendo tirado as linhas retas AB, AC, AD, e semelhantes, tem-se a mesma proporção entre a curva ANB e a reta AB, que entre a curva ANBC e a reta AC, ou ANBCD e AD, e, assim as outras. E caso se obtenha as tangentes DE, CF, GB etc, os ângulos ADE, ACF, ABD etc, serão iguais. (AT, II, p. 360-361).

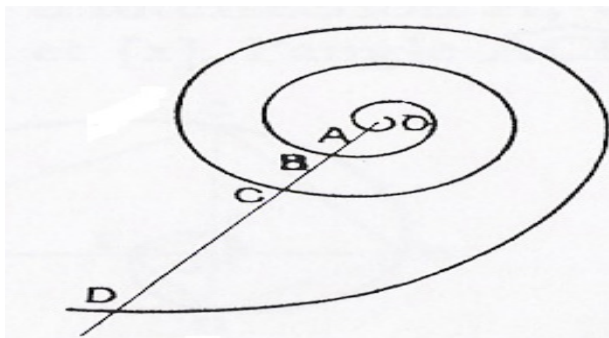
Constata-se, assim, que a partir da determinação das tangentes, Descartes identifica, por um lado, que a espiral é angular e, por outro, que o arco desta curva é proporcional ao raio, de tal modo que, o crescimento na direção da curva e o crescimento na direção do raio estão dentro de uma relação constante. Vuillemin sustenta, então, que toda progressão geométrica é suficiente para caracterizar a espiral logarítmica de Descartes. Caso se examine esse espiral em um raio passando para o polo, isto é, com os comprimentos OA, OB, OC, OD, constata-se a seguinte progressão geométrica:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} \mu \text{ (FIGURA 2).}^2$$

Disso conclui-se que os comprimentos incluídos dentro de um mesmo raio, isto é, entre as espirais sucessivas, formam uma progressão geométrica de mesma padronização, ou seja, na mesma razão que determina:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{CD} \dots = \mu.^3$$

FIGURA 2



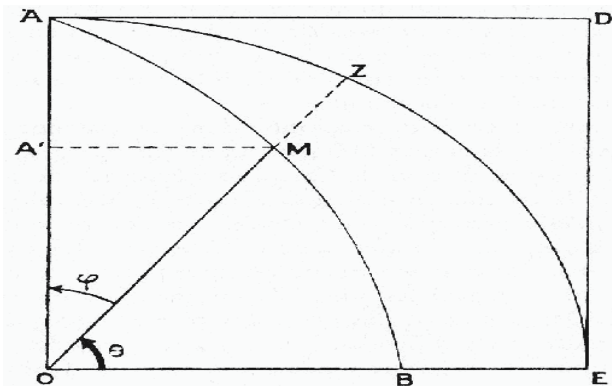
Fonte: VUILLEMIN, 1960, p. 41.

Assim como a espiral, Descartes exclui a construção da quadratriz como um critério que prescreve a exatidão e a precisão da razão e, por isso, a designa como uma curva a mecânica (a quadratriz é uma curva que designa a quadratura do círculo ou, em outras palavras, sendo dada a medida da circunferência, requisita-se que se encontre o seu diâmetro)¹. Vuillemin acrescenta ainda que, embora, Descartes designe essa curva como mecânica, é capaz de compreender – de maneira semelhante à explicação do movimento da espiral logarítmica — o seu movimento mecânico². Ora, nota-se, portanto, que há uma diferenciação entre a designação de curva mecânica e a compreensão do movimento mecânico, a saber, (1) curva mecânica é aquela que não detém em si o critério de razão da análise algébrica, ao passo que, (2) movimento mecânico é admitido em curvas mecânicas nas quais são determinadas propriedades analíticas que possibilitam a compreensão do seu movimento.

Torna-se necessário examinar uma possível interpretação cartesiana do modo como Pappus explica a quadratriz a partir do quadrado OADE. Tal interpretação é também realizada por meio dos comentários feitos por Vuillemin. Segue Vuillemin: propondo O como centro, Pappus traça um quarto do círculo de raio OA (FIGURA 3)³. Supõe que o raio OA gira por meio de um movimento uniforme em volta de O e que, durante esse mesmo tempo, a reta AD se move paralelamente a OE em um movimento igualmente

uniforme em direção a AO. No início AD estará na posição AD e OA na posição AO. A chegada AD e OA estará simultaneamente na posição OE.

FIGURA 3



Fonte: VUILLEMIN, 1960, p. 146

Seja ϕ o ângulo AOZ e M a intersecção do raio OZ e da curva quadratriz obtida por um movimento composto (problema linear). Poder-se-á construir pelos pontos a curva que é engendrada na divisão de uma parte OA e do outro ângulo EOA em duas partes iguais. A equação da curva é igualmente fornecida pela relação do ângulo $\frac{\pi}{2}$ da curva é igualmente fornecida pela relação do ângulo $\frac{\pi}{2} = \frac{AO}{OA'} = \frac{OA}{OM} \cdot \sin \theta$. Essa relação está para cada ponto M obtido para a construção, a saber, dividido em tantas quantas partes que o segmento de retas OA. Tem-se: $\frac{\pi}{2} / \theta = AO/OA' = OA/OM \cdot \sin \theta$

Coloca-se pela convenção: $OA=1$ e caso se considere o ângulo $\phi = MOA$, chega-se: $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\phi}{OA - OA'} = \frac{\phi}{1 - OA'}$$

Observa-se OA' como incógnita y , função da variável independente $x = A'M$. Tem-se, assim: $\frac{x}{y}$

$$= \frac{A'M}{OA'} = \frac{OM \sin \phi}{OM \cos \phi} = \operatorname{tg} \phi \text{ e } \frac{\pi}{2} = \frac{\phi}{1 - y}$$

$$\text{Donde se obtém: } \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} y$$

e

$$(u \neq 0) \quad x = \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \frac{\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \frac{\pi y}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}}$$

u tende a zero: $^1 \operatorname{tg} u \rightarrow u$

Essa expressão tende a $\frac{2}{\pi}$ quando y tende a zero. Logo: $OB = \frac{2}{\pi}$ é a expressão matemática pela qual se pode adquirir a determinação de π .² Ao examinar o critério de construtibilidade da quadratriz de Pappus, Descartes, não identifica o ponto de intersecção entre essa curva e uma reta, como, por exemplo, os pontos pertencentes a uma reta, a hipérbole e a elipse, quando ele tratou das ovas (enquanto curva geométrica). Neste último caso, em especial, observa-se que cada ponto do lugar é obtido como intersecção entre duas curvas geométricas, por sua vez, determinadas pela aplicação de uma sequência finita de construções exatas. Numa carta datada de 13 de novembro de 1629, Descartes sustenta a ininteligibilidade da quadratriz:

A invenção do Senhor Gaudey é muito boa, isto é, em uma viabilidade prática. [...] A linha hélice que vós não nomeastes e que não é uma linha aceita na Geometria, mais do que aquela que é designada quadratriz, porque ela serve para quadrar o círculo e, igualmente, para dividir o ângulo em todos os tipos de partes iguais tanto quanto aquela, e tem muitas outras utilidades que podereis ver nos Elementos de Euclides, comentados por Clavius. Ora, embora possamos encontrar uma infinidade de pontos por onde passa a hélice e a quadratriz, mesmo assim, não se pode encontrar geometricamente nenhum dos pontos que sejam necessários para os efeitos tanto de uma quanto da outra [...] Correspondance (AT, I, 70-71).³

Ainda nesta carta, Descartes alega que o ponto que fornece o diâmetro do círculo ao quadrado dado na explicação de Clavius não é determinado, logo, tampouco o ponto de intersecção entre a quadratriz e a base na construção dada por Clavius é exatamente determinada. Deve-se lembrar que (1) segundo Descartes, caso um ponto que pertença a um lugar seja construído pela intersecção entre duas curvas mediante um ponto arbitrariamente escolhido, ele poderá ser determinado a um ponto arbitrariamente escolhido; e (2) se os pontos de um lugar são construídos por ponto a ponto,

então eles são exatamente determinados. Estes dois critérios gerais de construtibilidade são, pois, os meios pelos quais Descartes chega à designação de “figura geométrica” e a determinação de “propriedades analíticas” mediante a compreensão do movimento mecânico estabelecido em algumas curvas. Em uma carta datada de 31 de março 1638, ao expor a Mersenne quais são os gêneros de problemas que devem ser excluídos da Geometria, Descartes diz:

Mas, quanto às questões de Geometria que eles vos prometem me propor, as quais não conseguem solucionar e acreditam não poder ser resolvidas pelo meu método, eu penso que me encontro em uma posição desvantajosa. De fato, primeiramente, é contra o estilo dos geômetras propor aos outros questões que eles mesmos não podem resolver. Depois, há as que são impossíveis, como a quadratura do círculo etc., há outras que, embora sejam possíveis, estendem-se, contudo, para além dos limites que coloquei, não porque exigem outras regras ou mais espíritos, mas porque é preciso mais trabalho⁴.

Defendo que, para Descartes as curvas geométricas devem ser proporcionalmente estabelecidas por meio de movimentos regulares. Tal proporção é adquirida pela legitimidade racional da análise algébrica. Esse é o principal critério de diferenciação entre as curvas geométricas e as curvas mecânicas. Entretanto, se faz necessário diferenciar as seguintes designações (1) curva mecânica e (2) movimento mecânico. Isso porque (1) curva mecânica é aquela que não detém em si o critério de razão da análise algébrica, ao passo que, (2) movimento mecânico é admitido em curvas (figuras) mecânicas em que são projetadas propriedades analíticas, as quais viabilizam a compreensão do seu movimento. Esse é, pois, o exemplo do movimento mecânico da espiral e da cicloide – a cicloide é designada também como roleta, quando Descartes trata de máquinas mecânicas –, isso porque, Descartes constata que a determinação da normal e da tangente (propriedades analíticas) a uma curva em um ponto é atribuída ao conhecimento da proporção que mostra o movimento destas mencionadas curvas mecânicas.

Notas

- 1 *A Geometria* é um dos três ensaios que acompanham o *Discurso do método*. Segundo Cottingham (1993, 73), “*A Geometria* é constituída por três Livros \ Capítulos: o primeiro trata dos problemas que podem ser construídos apenas com o uso de círculos e linhas retas; o Livro II expõe a natureza das linhas curvas; e o terceiro, examina os sólidos e os hipersólidos”.
- 2 Na *Geometria*, Descartes explica a sua concepção de Matemática, anunciada desde as *Regras para orientação do Espírito*. Segundo Alquié: [...] Descartes consagra de 1628 a 1637 às suas obras científicas. [...] Pensa primeiro numa notação geométrica, que poderia ter-lhe aberto a via do cálculo infinitesimal, mas limitou-se a simplificar os sinais cósicos, então em uso: sinais complexos, em geral tirados dos alfabetos grego e hebraico, e que embaraçavam o espírito do matemático. Descartes, que trabalhava nesta questão desde o início de suas investigações, não tarda a servir-se apenas das letras do alfabeto latino e dos sinais das quatro operações aritméticas. Designa primeiro as quantidades conhecidas pelas letras minúsculas e as quantidades desconhecidas pelas letras maiúsculas: em 1637, as maiúsculas serão substituídas pelas do alfabeto latino: x , y e z , e o sinal da raiz quadrada ou cúbica surge então. Do mesmo modo, inventa um método para baixar o grau das equações. Mas a sua grande descoberta, então, é a geometria analítica, aperfeiçoada em 1631, a propósito do problema de Pappus. A Geometria Analítica é, sem dúvida nenhuma, um dos frutos da preocupação principal de Descartes. Aspirando encontrar uma *ciência universal*, capaz de tratar das quantidades em geral, e sem se preocupar com a sua especificação, sem curar de saber se o que está a tratar são figuras ou números, julga poder alargar o método algébrico a todas as ciências da quantidade. Mas não se julgue que pensasse em reduzir o espaço imaginado a uma realidade propriamente intelectual ou espiritual, cujo conhecimento já não apelaria para qualquer intuição de tipo sensível. Pretendi apenas encontrar uma correspondência cômoda entre a equação e a curva geométrica. De resto, a palavra álgebra, não designava um ramo independente da matemática, mas um processo da aritmética deste tempo, que consistia em estabelecer, a partir dos dados de um problema, uma equação que a quantidade incôgnita satisfizesse. Este método matemático assemelha-se ao que, na geometria grega, se chamava análise, e que consistia em construir uma linha desconhecida a partir de relações geométricas conhecidas. Por isso, longe de conferir à sua descoberta toda a importância que hoje lhe atribuímos, Descartes vê nela uma simples apresentação algébrica da Geometria dos antigos. Com isso, a *Geometria* de 1637 não será um Tratado sistematizado de Geometria Analítica, mas expõe um fundamento nuclear da filosofia de Descartes, ou seja, o método baseado em mecanismos puramente simples, estabelecidos nos raciocínios matemáticos (1986, 35-36).
- 3 Deve-se assinalar que os problemas lineares contemplam diversos tipos de construções. Dentre tais construções, destacam-se, as construções “geométricas” e “mecânicas”.
- 4 Segundo Boyer: “Se deve notar que a classificação cartesiana dos problemas geométricos incluía alguns dos que Pappus anotara sob nome de lineares. Ao introduzir as novas curvas de que necessitavam para as construções geométricas além do quarto grau, Descartes acrescentara aos axiomas usuais da geometria ordinária mais um axioma. Este fato em si, não difere muito do que os antigos tinham realizado em sua geração cinemática de curvas como a quadratriz, a cissóide, a concóide e

a espiral, mas ao passo que os antigos tinham agrupado todas elas, Descartes fez distinções cuidadosas entre aquelas, como a cissóide e a concóide, que designou de algébricas, e as outras como a espiral e a quadratriz, que hoje são chamadas transcendententes. Ao primeiro tipo, Descartes deu reconhecimento geométrico total, junto com a reta, o círculo e as cônicas, chamando todas elas de “curvas geométricas”; o segundo tipo ele excluiu totalmente da geometria, estigmatizando-as como “curvas mecânicas” (1996, p. 235).

- 5 Boyer relata ainda a exclusão por parte de Descartes das figuras mecânicas da seguinte maneira: “Para essa decisão, Descartes toma por pressuposto a exatidão do raciocínio matemático. Assim, as curvas mecânicas deveriam ser concebidas, como descritas por dois movimentos separados, cuja relação não admitiria uma determinação exata - tal como a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo no caso dos movimentos que descrevem a quadratriz e a espiral. Em outras palavras, Descartes, considerava as curvas algébricas como descritas exatamente, e as transcendententes (expressão proposta por Leibniz) como descritas inexatamente [...]” (1996, p. 235).
- 6 No *Excerpta Mathematica*, Descartes substitui a construção cinemática do espiral como possibilidade de uma figura instrumental que permitisse calcular as reflexões e refrações. Descartes: “*Pro 5 capite, línea est spiralis, & primò quidem versus A curvatur, deinde versus B, nec utilis est refractioni, sed irregulari reflexioni tantum; imò clauditur. Excerpta Mathematica (AT, X, 321).* Segundo Boyer: “O espiral de Arquimedes é definido como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio, ou semi-reta, uniformemente ao longo do raio enquanto esse gira uniformemente em torno de sua origem. Como se segue, nas coordenadas polares a equação seria de $r = a \theta$. Dada tal espiral, a trisseção do ângulo ocorre da seguinte forma; O ângulo é posto de modo que seu vértice e o primeiro lado coincidam com o ponto inicial. O da espiral e a posição inicial AO da semi-reta. O segmento OP, onde P é o ponto em que o segundo lado do ângulo corta a espiral, será então dividido em terços pelos pontos R e S. Com isso, são traçados círculos com O como centro e raios OR e OS. Se tais círculos cortam o espiral nos pontos U e V, as retas OU e OV trissectam o ângulo AOP. Num caso que pelo ponto P trace-se a tangente à espiral POR e se supõe que ela corte no ponto Q a reta por O que é perpendicular a OP, então, concebe Arquimedes o segmento de reta OQ – designado como subtangente polar para o ponto P – que tem como comprimento igual ao lado do arco circular PS com centro em O e raio OP que é cortado pela semi-reta inicial polar e pela semi-reta do raio vetor OP” (1996, p. 87).
- 7 Segundo Boyer (1996), Torricelli pode ter derivado sua concepção para “composição de movimentos” de Arquimedes ou de Descartes. Como se segue, Torricelli estudou espiral de vários tipos, ao passo de descobrir a retificação da espiral logarítmica. Como se sabe, havia neste tempo – em meados de 1630 a 1640 – uma notável unidade de interesses matemáticos na intercomunicação através de Mersenne. Os problemas envolvendo infinitésimos eram de longe os mais populares e que agitavam o despertar dos pensadores da época. No *De Dimensione Parabolae*, por exemplo, Torricelli forneceu vinte e uma demonstrações a respeito da quadratura da parábola, usando métodos com o uso de indivisíveis e de exaustão mais ou menos em igual número. Um na primeira categórica é quase idêntico à quadratura mecânica concebida por Arquimedes em seu método, presumivelmente não existente; então, como se poderia prever, um na segunda categoria é praticamente o dado no tratado de Arquimedes Sobre a quadratura da parábola, bem divulgada no século XVII (cf. BOYER, 1996). Serfati (1993) oferece o seguinte modelo de gera-

- ção da espiral: Uma semi-reta gira em torno de um ponto O com uma velocidade angular constante. De outra parte, de um círculo variável, mas sempre de centro O , constata-se que seu raio cresce com uma velocidade constante. No instante t , círculo e reta se cortam em um ponto $F(t)$ cujo lugar é denominado de Espiral por Arquimedes. Nota-se que essa curva é composta por dois tipos de movimentos, a saber, um movimento circular e outro movimento retilíneo (cf. SERFATI, 1993).
- 8 VUILLEMIN, 1960.
- 9 *Ibidem*.
- 10 *Ibidem*.
- 11 *Ibidem*.
- 12 *Ibidem*, p. 40-41.
- 13 VUILLEMIN, 1960.
- 14 *Ibidem*.
- 15 *Ibidem*, p. 146-147.
- 16 Em uma carta datada em 1638, ao expor a Mersenne quais são os gêneros de problemas que devem ser excluídos da geometria, ele julga de maneira contundente que a quadratura do círculo é impossível: “Mas, quanto às questões de geometria que eles vos prometem me propor, as quais não conseguem solucionar e crêem não poder serem resolvidas pelo meu método, eu penso que me encontro em uma posição desvantajosa. Com efeito, primeiramente, é contra o estilo dos geômetras propor as outras questões que eles mesmos não podem resolver. Depois, há as que são impossíveis, como a quadratura do círculo etc., há outras que, embora sejam possíveis, estendem-se, contudo, para além dos limites que coloquei, não porque exigem outras regras ou mais espírito, mas porque é preciso mais trabalho [...]”. *Correspondance* (AT, II, 90-91). Segue a exposição da explicação da quadratura do círculo no texto latino original do *Excerpta Mathematica*: Para quadrar o círculo, nada encontro de mais apto do que, sendo dado um quadrado bf , juntar o retângulo cg , delimitado pelas linhas ac e cb , igual à quarta parte do quadrado bf ; e, em seguida, juntar o retângulo dh , formado pelos segmentos da , dc , igual à quarta parte do precedente; e, da mesma maneira, juntar o retângulo ei e outros infinitos até atingir o ponto x . Todos eles juntos comporão a terça parte do quadrado bf . E esta linha ax será o diâmetro do círculo, cuja circunferência é igual ao perímetro desse quadrado bf . Por outro lado, ac é o diâmetro do círculo inscrito no octógono isoperimétrico ao quadrado bf , ad é o diâmetro do círculo inscrito na figura de 16 lados e ae , o diâmetro inscrito na figura de 32 lados, isoperimétrico ao quadrado bf ; e assim ao infinito *Excerpta Mathematica* (AT, X, p. 304-305). Segue a versão original latina (VI) *Circuli Quadratio*. *Ad quadrandum circulum nihil aptius invenio, quam si dato quadrato bf adjungatur rectangulum cg comprehensum sub lineis ac & cb , quod sit aequale quarte parti quadrati bf ; item rectangulum dh , factum ex lineis da , dc , aequale quartae parti praecedentis; & eodem modo rectangulum ei , atque alia infinita usque ad x : quae omnia simul aequabuntur tertiae parti quadrati bf . Et haec linea ax erit diameter circuli, cujus circumferentia aequalis est circumferentiae hujus quadrati bf : est autem ac diameter circuli octogono, quadrato bf isoperimetro, inscripti; ad diameter circuli inscripti figurae 16 laterum, ac diameter inscripti figurae 32 laterum, quadrato b isoperimetrae; & sic in infinitum.* *Excerpta Mathematica* (AT, X, 304-305). O problema que Descartes afirma ter resolvido não é, rigorosamente, aquele da quadratura do círculo. Nota-se, entretanto, que Descartes dá ao fragmento o título: *Circulo quadratio* (quadratura do círculo). A equivalência entre os dois resultados pode ser estabelecida sobre a base da primeira proposição do tratado arquimediano da *Medida do círculo*, conhecido entre os matemáticos do século XVII: Todo círculo equivale em área

ao triângulo retângulo no qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto é igual ao raio e o outro é igual ao perímetro circunferência (ARQUIMEDES, 1960). Uma vez estabelecida essa equivalência, se conhecermos o raio de um círculo dado e a medida da circunferência, podemos construir uma figura retilínea de área igual àquela do círculo. E, como o fragmento de Descartes presume que se saiba a medida do raio (ou do diâmetro), a partir daquela da circunferência, a quadratura do círculo pode ser, por conseguinte, resolvida. Entretanto, nenhuma indicação no texto torna explícita a relação entre a construção dos retângulos, cujas áreas estão em sucessão geométrica (CRIPPA, 2010).

17 VUILLEMIN, 1960. Mancosu ressalta ainda que em meados da primeira metade do século XVII, o problema de saber se a quadratura do círculo é possível - isto é, se é possível construir, com métodos geométricos, um quadrado com área igual à de um círculo dado - permaneceu um problema aberto na agenda dos matemáticos (MANCOSU, 1996).

18 VUILLEMIN, 1960.

19 O problema da quadratura do círculo foi formulado inicialmente por tem Me-naecmus e Dinóstrato. Segundo Boyer, para Dinóstrato, a quadratura do círculo tornou-se uma questão simples quando foi observada uma notável propriedade da extremidade Q da trissectriz de Hípias. Se a equação da trissectriz $\pi r \sin \theta = 2a\theta$ onde a é o lado do quadrado ABCD associado à curva, então o limite de r quando θ tende a zero é de $2a / \pi$. Como se segue, a demonstração tal como é concebida por Pappus e provavelmente devida a Dinóstrato, baseia-se unicamente em considerações de uma geometria elementar. Com isso, o teorema de Dinóstrato versa que o lado a é a medida proporcional entre segmentos DQ e o arco do quarto de círculo AC , isto é, $AC / AB = AB / DQ$. Ao passo que segundo Boyer: “Ao se utilizar uma demonstração ou prova indireta tipicamente grega se estabelece o teorema por distinção das alternativas. Então, supondo primeiro que $AC / AB = AB / DR$ onde $DR > DQ$. Então seja S a interseção do círculo de centro D e raio DR com a trissectriz e T a interseção do mesmo círculo com o lado AD do quadrado. De S se baixaria a perpendicular SU ao lado CD . Dinóstrato sabia que os arcos do círculo correspondentes são proporcionais aos raios, logo $AC / AB = TR / DR$; e como por hipóteses $AC / AB = AB / DR$, resulta que $TR = AB$. Mas pela propriedade que define a trissectriz e assim se sabe que $TR / SR = AB / SU$. Logo, como $TR = AB$, deve seguir-se que $SR = SU$, o que é evidentemente falso, pois a perpendicular seria mais curta que qualquer outro segmento ou a curva indo de S à reta DC . Portanto o quarto termo DR na proporção $AC / AB = AB / DR$ não pode ser maior que DQ . De maneira semelhante se *prova* ou demonstra que essa quarta proporcional não pode ser menor que DQ ; portanto o teorema de Dinóstrato estaria provado, isto é, $AC / AB = AB / QD$. Dado o ponto Q de interseção da trissectriz com DC , se obtém, pois, uma proporção envolvendo três segmentos retilíneos e o arco circular AC . Por uma construção geométrica simples do quarto termo numa proporção se pode, com efeito, facilmente traçar um segmento de reta b de comprimento igual a AC . O retângulo que tem um lado $2b$ e a como o outro lado, se obtém a área exatamente igual à do círculo com raio a ; constrói-se facilmente um quadrado de área igual à do retângulo, tomando como lado do quadrado a média geométrica dos lados do retângulo. Como Dinóstrato provou a que a trissectriz de Hípias serve para quadrar o círculo denomina-se comumente de quadratriz. Como se segue, desde os geômetras gregos que esse tipo de construção violava as regras da geometria, isto é, em construções que apenas advogavam círculos e retas”. BOYER, 1996, p. 66-67. Serfati oferece o seguinte modelo de geração da quadratriz: Do ponto H_1 é descrito

um movimento retilíneo uniforme em um lado vertical do quadrado. Do ponto H_2 é descrito o movimento uniforme em $1/4$ do círculo de centro O , de modo que os dois pontos originem-se ao mesmo tempo do ponto C e chegam conjuntamente no ponto B . A cada instante t , a intersecção do raio $OH_2(t)$ e da paralela partem de $H_1(t)$ ao lado horizontal do quadrado. Com isso, designa-se o ponto $F(t)$, cujo ponto determina a quadratriz de Hippias. Esta curva surge por isso a partir de dois tipos de movimento uniforme, a saber, um movimento circular e um movimento retilíneo (SERFATI, 1993).

20 As curvas que Descartes admite como geométricas são aquelas que permitem ser construídas por pontos, de modo que, qualquer ponto desta curva possa ser construída através da mesma realização. Esta concepção de Descartes se torna mais clara, quando ele trata especificamente do caso das ovas, construção esta, que a expõe na *Geometria*, em uma elaboração por pontos, que se evidencia em oposição, fundamentalmente com a qual Clavius esboça para a quadratriz. Clavius: “Descreverei a curva quadratriz geometricamente dessa maneira: seja o arco BD dividido em várias partes iguais, e um dos dois outros lados AD , BC no mesmo número de partes iguais. Essa divisão será mais simples, se for primeiramente bissectado, a saber, seja o arco DB , seja um dos dois lados AD , BC , e, em seguida, cada parte for novamente bissectada e, assim, posteriormente tanto quanto se desejar” (CLAVIUS, 1604, p. 321). As intersecções dos segmentos traçados desse modo formarão um conjunto de pontos pertencentes a uma quadratriz. Ora, na passagem citada, Clavius propõe uma construção da quadratriz mais precisa e mais geométrica que a apresentada por Pappus na *Collectio*. Segundo Rodis-Lewis, os jesuítas do colégio La Flechè ensinaram matemáticas ao estilo escolástico desta área do saber, em outras palavras, a matemática de Clavius (RODIS-LEWIS, 1995). A matemática utilizada por Clavius não requisita a álgebra em favor da construção geométrica, pois o jesuíta não tinha posse de um método analítico, e, diante disso, apenas utilizava procedimentos silogísticos – ao modo aristotélico – da categoria da quantidade. No que diz respeito a divisão do ângulo em partes iguais, Milhaud relata que Descartes anuncia em 26 de março de 1619, quatro inovadoras demonstrações, a partir do uso do compasso. Tratava-se, primordialmente, do famoso problema da divisão de um ângulo em três partes iguais, ou mesmo de um número qualquer de partes iguais; depois dos três tipos de equações cúbicas, cada uma com toda a variedade de sinais que se pode comportar, isto é, em treze casos distintos para as equações comuns, a saber, entre z e $OX+ON$, entre z e $OX-ON$, entre z e $ON-OX$. Observa-se que Descartes emprega as notações cossicas. Tais notações eram usadas, sobretudo, na matemática alemã do século XVI e do começo do século XVII. É possível assinalar que Descartes haveria adquirido as notações por meio das obras do Jesuíta Clavius, que deveria fazer parte da biblioteca dos Jesuítas de La Flechè. É um sistema de notações onde – como em Diophante – uma característica especial designa cada uma das três primeiras potências da incógnita e da raiz. N é a raiz, a coisa (cosa para Viète), z designa o quadrado e π o cubo, zz a quarta potência, etc. A letra O introduzida por Descartes designa um coeficiente qualquer. Em seguida, Descartes emprega as notações nos treze casos distinguidos por ele: $x^3 = \pm px \pm q$, $x^3 = \pm px^2 \pm q$, $x^3 = \pm px^2 \pm qx \pm r$. De onde é necessário os três tipos obtidos com todos os sinais – no secundo membro. Um ângulo é facilmente dividido em três partes iguais por um compasso. Faz-se com que os três ângulos formados resultem sempre iguais, isto é, seja qual for a abertura do compasso (MILHAUD, 1921).

21 *Correspondance* (AT, II, 90-91).

Referências

ALLARD, J.-L. Le mathématisme de Descartes. Ottawa: Université d'Ottawa, 1963.

ALQUIÉ, F. A Filosofia de Descartes. Tradução Rodrigues Martins. Lisboa: Presença, 1986.

_____. Œuvres philosophiques de Descartes. Paris: Garnier, 1987. vol. 2.

BERKEL, K. Beekman, Descartes et La Philosophie Physico-Mathématique. Archives de Philosophie, n° 46, p. 620-626, 1983.

BEYSSADE, J.-M. Études sur Descartes. Paris: Éditions du Seuil, 2001.

BLANCHÉ, R. Axiomatics. London: Routledge & Kegan Paul, 1966.

BOYER, C. História da Matemática. Tradução Elza Gomide. São Paulo: E. Blücher, 1996.

_____. History of analytic geometry. New Jersey: Princeton University, 1988.

_____. The Rainbow: from myth to mathematics. New Jersey: Princeton University, 1987.

BOS, H. J. M. On the representation of curves in Descartes' Géométrie. Archive for History of Exact Sciences, v. 24, no. 4, p. 295-338, 1981.

COSTABEL, P. Démarches Originales de Descartes Savant. Paris: Vrin, 1982.

_____. Exercices pour les éléments des solides. Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

COTTINGHAM, J. Dicionário Descartes. Tradução Helena Martins. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1993.

CLARKE, D. Descartes' Philosophy of Science. Manchester: Manchester University, 1982.

CRAPULLI, G. Introduzione a Descartes. Roma: Laterza, 2001.

_____. Mathesis universalis. Genesi di un'idea nel XVI secolo. Roma: Edizioni dell'Ateneo, 1969.

CRIPPA, D. A solução cartesiana da quadratura do círculo. *Scientiae studia*, v. 8, n. 4, p. 597-621, 2010.

DESCARTES, R. *Œuvres de Descartes*. Paris: Vrin, 1996. 11 v. (Publiées par Charles Adam e Paul Tannery).

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE. *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Paris: A. Blanchard, 1959.

DUCHESNEAU, F. Descartes et le modèle de la Science. In: BOURGEOIS, B.; HAVET, J. (éd.) *L'Esprit Cartésien*. Paris: Vrin, 2000.

DUHAMEL, J. M. C. *Des méthodes dans les sciences de raisonnements*. Paris: Gauthier-Villars, 1885.

ERNEST, C. *The principal Works of Simon Stevin*. Amsterdam: D. J. Struik, 1955. 5 v.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer, 1991.

ÉVORA, F. *Astronomia e Cosmologia Pré-Galileana*. Campinas: Unicamp: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1993. (A Revolução Copernicano-Galileana, v. 1).

_____. *A Revolução Galileana*. Campinas: Unicamp: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1993. (A Revolução Copernicano-Galileana, v. 2).

FICHANT, M. *Science et Métaphysique dans Descartes et Leibniz*. Paris: PUF, 1998.

ITARD, J. *Essais d'Historie des Mathématiques*. Paris: A. Blanchard, 1984.

GARBER, D. *Corps Cartésiens: Descartes et la philosophie dans les Sciences*. Paris: Presses Universitaires de France, 2004.

_____. *Descartes Embodied*. Chicago: Cambridge University, 2001.

_____. *La physique métaphysique de Descartes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1999.

_____. *Philosophers of Substance*. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 27, n.3, p. 421-427, 1996.

GAUKROGER, S. The nature of abstract reasoning: philosophical aspects of Descartes work in algebra. In: COTTINGHAM, J. (ed.). The Cambridge Companion to Descartes. New York: Cambridge University, 1992.

GILSON, É. Discours de la Méthode. Texte et Commentaire. Paris: Vrin, 1987.

_____. Index Scolastico-Cartésien. Paris: Librairie Félix Alcan, 1913.

GUEROULT, M. Descartes Selon L'Ordre des Raisons. Paris: Aubier, 1968. vol.1.

_____. _____. Paris: Aubier, 1968. vol. 2.

_____. Lógica, arquitetônica e estruturas constitutivas dos sistemas filológicos. Trans/ Form/ Ação, v. 30, n. 1, p. 235-246, 2007.

_____. Métaphysique et physique de la force chez Descartes et chez Malebranche. Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 59, n. 1, p. 1-37, 1954.

HAMELIN, O. Le système de Descartes. Paris: L. Robin, 1911.

HEATH, T. L. The Works of Archimedes. New York: Dover, 1953.

_____. The thirteen books of Euclid's elements. New York: Dover, 1956.

_____. A History of Greek Mathematics. New York: Dover, 1981.

HINTIKKA, J.; REMES, U. A análise geométrica e a lógica moderna. Cadernos de História e Filosofia da Ciência, n. 4, p. 28-47, 1958.

_____. The method of analysis. Dordrecht: D. Reidel, 1974.

JULLIEN, V. Descartes, la "Géométrie" de 1637. Paris: Presses Universitaires de France, 1996.

KLEIN, J. Greek mathematical thought and the origin of algebra. New York: Dover, 1968.

KOBAYASHI, M. La philosophie naturelle de Descartes. Paris: Vrin, 1993.

KOYRÉ, A. Considerações sobre Descartes. Lisboa: Presença, 1992.

- LORIA, G. Descartes géomètre. *Revue de métaphysique et morale*, n. 44, p. 199-220, 1937.
- MANCOSU, P. *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. New York: Oxford University, 1996.
- MARION, J.-L. *Sur l'ontologie grise de Descartes*. Paris: Vrin, 1975.
- MERSENNE, M. *Harmonie Universelle*. Paris: Sébastien Cramoisy, 1636.
- MILHAUD, G. *Descartes Savant*. Paris: Librairie Félix Alcan, 1921.
- PAPPUS. *La collection mathématique*. Paris: A. Blanchard, 1982.
- PATY, M. *Mathesis universalis e inteligibilidade em Descartes*. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, v. 8, n. 1, p. 9-57, 1998.
- PHILONENKO, A. *Reler Descartes*. Tradução Fernando Oliveira. Lisboa: Inst. Piaget, 1996.
- RABUEL, C. *Commentaires sur la Géométrie de monsieur Descartes*. Lyon: Marcellin Duplain, 1730.
- SASAKI, C. *Descartes' Mathematical Thought*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- SCHUSTER, J. *Descartes and the Scientific Revolution, 1618-1634*. *Ann Arbor: Princeton University*, 1977. vol. 1.
- _____. _____. *Ann Arbor: Princeton University*, 1977. vol. 2.
- _____. Full circle: Cartesian dynamics, optics and the tennis ball model, 1628-33. In: GAUKROGER, S.; SCHUSTER, J.; SUTTON, J. *Descartes' Natural philosophy*. London: Routledge, 2000.
- SCOTT, J. F. *The Scientific Work of René Descartes*. London: Taylor & Francis, 1952.
- SERFATI, M. *Les compas Cartésiens*. *Archives de Philosophie*, vol. 56, n. 3, p. 197-230, 1993.
- _____. *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*. Paris: APMEP, 1992.

SHEA, W. La science de Descartes. Laval Théologique et Philosophique, vol. 53, n. 3, p. 531-549, 1997.

_____. The Magic of Numbers and Motion. Canton: Science History Publications, 1991.

SMITH, D. The geometry of René Descartes. New York: Dover, 1954.

TANNERY, P. Géométrie Grecque. Comment Son Histoire Nous Est Parvenue Et Ce Que Nous En Savons. Paris: Gauthier-Villars, 1887.

TOURNADRE, G. L'orientation de la science cartésienne. Paris: Vrin, 1982.

VIÈTE, F. Introduction to the analytical art. In: KLEIN, J. Greek mathematical thought and the origin of algebra. New York: Dover, 1968.

_____. L'algèbre nouvelle de M. Viète. Traduit par A. Vasset. Paris: Pierre Rocolet, 1630.

VUILLEMIN, J. Mathématiques et Métaphysique Chez Descartes. Paris: Presses Universitaires de France, 1960.

WEBER, J. P. La Constitution du texte des Regulae. Paris: Société d'Édition d'Enseignement Supérieur, 1964.

_____. La méthode de Descartes d'après les Regulae. Archives de Philosophie, vol. 35, n. 1, p. 51-60, 1972.

WILLIAMS, B. Descartes: the project of pure enquiry. New York: Penguin, 1978.