



Argumentação, prova e demonstração na visão de estudantes ingressantes no curso de licenciatura em Matemática

Uma análise de dados textuais a partir do software IRaMuTeQ

João Carlos Caldato

Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), campus Paracambi, Brasil
orcid.org/0000-0001-6951-3590

Lilian Nasser

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brasil
orcid.org/0000-0001-6050-4807

O principal objetivo deste artigo é identificar como estudantes ingressantes no curso de licenciatura em Matemática interpretam as terminologias argumentação, prova e demonstração. Trata-se de um recorte da primeira etapa de uma pesquisa sobre argumentação no âmbito da Educação Matemática. Ao todo, 78 licenciandos de três instituições públicas de Ensino Superior participaram da produção de dados. Para a análise dos dados, foi utilizado um software que permite realizar análises estatísticas sobre dados textuais. Em vista disso, um objetivo secundário deste artigo é apresentar a possibilidade de utilizar o software IRaMuTeQ como um instrumento que auxilia na análise e na criação de categorias. A partir disso, foi possível inferir que o significado destas terminologias não é consensual entre os participantes e que, na visão deles, a prova estaria relacionada a algo mais formal ou a uma generalização, enquanto a demonstração estaria relacionada a algo mais informal ou a uma etapa que antecede a prova.

Palavras-chave: Argumentação heurística. Formação inicial de professores. Software livre. Análise estatística sobre dados textuais.

Argumentación, prueba y demostración desde la perspectiva de los estudiantes de ingreso a la carrera de Matemáticas: un análisis de datos textuales utilizando el software IRaMuTeQ

El objetivo principal de este artículo es identificar cómo los estudiantes que ingresan a la carrera de Matemáticas interpretan las terminologías argumentación, prueba y demostración. Este es un extracto de la primera etapa de una investigación sobre la argumentación en el ámbito de la Educación Matemática. En total, 78 estudiantes universitarios de tres instituciones públicas de educación superior participaron en la producción de datos. Para el análisis de los datos se utilizó un software que permite realizar análisis estadísticos sobre datos textuales. Ante esto, un objetivo secundario de este artículo es presentar la posibilidad de utilizar el software IRaMuTeQ como instrumento que ayude en el análisis y creación de categorías. De esto se pudo inferir que el significado de estas terminologías no es consensuado entre los participantes, y que a su juicio, la prueba estaría relacionada con algo más formal o una generalización, mientras que la demostración estaría relacionada con algo más informal. o una etapa que precede a la prueba.

Palabras-clave: Argumentación heurística. Formación inicial del profesorado. Software libre. Análisis estadísticos sobre datos textuales.

Argumentation, proof and demonstration from the perspective of students entering the undergraduate course in Mathematics: an analysis of textual data using the IRaMuTeQ software

The main objective of this article is to identify how incoming students in the Mathematics degree course interpret the terminologies argumentation, proof and demonstration. This is an excerpt from the first stage of a research on argumentation within the scope of Mathematics Education. In all, 78 undergraduate students from three public higher education institutions participated in the production of data. For data analysis, a software that allows statistical analysis to be carried out on textual data was used. In view of this, a secondary objective of this article is to present the possibility of using the IRaMuTeQ software as an instrument that assists in the analysis and creation of categories. As a result, it was possible to infer that the meaning of these terminologies is not consensual among the participants, and that, in their view, proof would be related to something more formal or a generalization, while demonstration would be related to something more informal or a stage preceding proof.

Keywords: Heuristic argumentation. Initial teacher training. Free software. Statistical analysis of textual data.

Introdução

É possível observar que a argumentação em Matemática vem ganhando espaço nos documentos oficiais que norteiam a Educação Básica no Brasil. Antes do início do novo milênio, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998a, 1998b) já preconizavam uma abordagem argumentativa nos anos finais do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio. Mas foi com a implantação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) que “[...] a argumentação entrou definitivamente no radar da Educação Básica brasileira ao ser relacionada como a competência geral número 7 da BNCC” (Azevedo *et al.*, 2023, p. 127).

A partir da leitura dos documentos oficiais, como os PCN e a BNCC, é possível constatar que existe, ao menos no papel, um incentivo à prática da argumentação e provas na Educação Básica e que uma das competências do ensino da Matemática é desenvolver o raciocínio lógico e a produção de argumentos convincentes. Mas será que na prática essa abordagem é realmente exercida? Essa competência é realmente atingida pelos alunos? Algumas pesquisas (Souza, 2009; Aguilar Júnior, 2012; Caldato; Utsumi; Nasser, 2017; Aguilar Júnior; Caldato, 2021; Costa, 2022; Krakecker, 2022) sinalizam que os alunos do Ensino Básico possuem dificuldades no que diz respeito ao processo de produção de provas em Matemática, sendo que, quando existe alguma produção, geralmente é pautada em evidências empíricas.

Em vista disso, defendemos que a argumentação precisa se fazer presente nas escolas (para além da Matemática) e a única forma de garantir efetivamente que isso ocorra é por meio da formação de professores, inicial ou continuada, e, conseqüentemente, da prática docente.

Ademais, atualmente estamos em fase de conclusão da segunda etapa de uma pesquisa direcionada aos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Em particular, neste texto, apresentamos um recorte da primeira etapa dessa pesquisa (Caldato, 2018), que teve a participação de 78 estudantes ingressantes no curso de licenciatura em Matemática, de três instituições públicas localizadas na Região Sudeste. Sendo assim, o objetivo principal deste artigo é identificar como os participantes interpretam as terminologias “argumentação”, “prova” e “demonstração” no âmbito da Matemática. Além disso, constitui um objetivo secundário apresentar a possibilidade de utilizar o *software* IRaMuTeQ como um instrumento que auxilia na análise estatística e na criação de categorias de dados textuais, a fim de que mais pesquisadores possam conhecê-lo e utilizá-lo.

É importante investigar as concepções de (futuros) professores porque elas influenciam diretamente as escolhas e as práticas de ensino (bem-sucedidas ou não) em sala de aula (Knuth, 2002; Thompson, 1992). Em particular, um conhecimento limitado no que diz respeito à

argumentação e prova pode suscitar sentimentos de incerteza e falta de confiança quando se trata de ensinar um conceito (Varghese, 2009).

Além disso, esta pesquisa se justifica com base nos documentos norteadores da Educação Básica, em especial na BNCC. De acordo com as competências e habilidades descritas neste documento, também é papel dos (futuros) professores instigar a elaboração de argumentos convincentes, desenvolver o senso crítico dos alunos em relação à argumentação utilizada e construir demonstrações cada vez mais formais para a validação de alguns resultados matemáticos.

Este artigo está estruturado do seguinte modo: além desta introdução, apresentamos a fundamentação teórica, com ênfase na conceituação de argumentação, prova e demonstração proposta por Nicolas Balacheff; posteriormente, introduzimos o *software* IRaMuTeQ e os procedimentos metodológicos; em seguida, os significados atribuídos pelos licenciandos para “argumentação” e para “demonstração” e “prova” são discutidos; por fim, apresentamos as considerações finais, os agradecimentos e as referências.

1 Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica proposta neste artigo visa apresentar uma possível interpretação para “argumentação”, “prova” e “demonstração” no contexto da Educação Matemática. Para isso, recorreremos a alguns educadores matemáticos que dissertam sobre a temática, com base no oitavo capítulo do livro de Reid e Knipping (2010). Nele, há uma discussão teórica sobre diferentes perspectivas de “argumentação”, a partir da literatura dos seguintes pesquisadores: Raymond Duval, Nicolas Balacheff, Nadia Douek, Paulo Boero, Bettina Pedemonte, Götz Krummheuer, Erna Yackel, Paul Cobb e Terry Wood. O Quadro 1 sintetiza as ideias descritas no referido capítulo, com destaque para as conceituações de “argumentação” apresentadas pelos pesquisadores e o respectivo aporte teórico.

Quadro 1 – Noções de Argumentação

Pesquisadores	Teóricos citados	Argumentação é...
Duval	Perelman	- uma espécie de raciocínio não dedutivo - surge quando há um argumento
Balacheff	Perelman	- um comportamento social usado para convencer - um obstáculo epistemológico para o aprendizado de provas matemáticas
Douek, Boero	Toulmin (brevemente)	- o processo que produz um discurso logicamente conectado (mas não necessariamente dedutivo) sobre um determinado assunto - o texto produzido através desse processo - um ou mais “argumentos” conectados logicamente
Pedemonte	Toulmin	- o processo de conjecturar

Krummheuer, Yackel, Cobb	Toulmin	- um fenômeno social - a explicação intencional do raciocínio de uma solução - técnicas ou métodos de estabelecer a reivindicação de uma declaração - um pré-requisito para a possibilidade de aprender
Wood	Toulmin	- um processo interativo de saber como e quando participar do debate

Fonte: Adaptado de Reid e Knipping (2010, p. 163, tradução nossa).

Conforme é possível observar no Quadro 1, no campo da Educação Matemática, existe mais de uma possibilidade de conceituar “argumentação”, o que impossibilita afirmar a existência de apenas uma interpretação. Neste texto, não pormenorizaremos as especificidades de cada um dos pesquisadores citados, porém abordaremos uma possível interpretação com referência aos estudos de Balacheff (1987, 1999, 2010, 2022a, 2022b). Essa escolha se deve ao fato de esse pesquisador apontar diferenças entre “argumentação”, “prova” e “demonstração”, o que é relevante para refletirmos sobre as análises das respostas dos licenciandos no decorrer do artigo.

Em Balacheff (1999) são apresentadas três diferentes concepções teóricas de argumentação, com base nas seguintes referências: Chaïm Perelman (1970 *apud* Balacheff, 1999), Stephen Toulmin (1958 *apud* Balacheff, 1999) e Oswald Ducrot (1980 *apud* Balacheff, 1999). Em linhas gerais, Perelman vê a argumentação como sendo convincente; Toulmin a vê como sendo sobre a estrutura do argumento e sua referência a premissas aceitas em uma comunidade; e Ducrot coloca a argumentação no centro da atividade do discurso e se concentra nas estruturas gramaticais (Reid; Knipping, 2010). É possível observar no Quadro 1 que Duval e Balacheff fazem referências à concepção de argumentação descrita por Perelman.

Duval (1999) chama a atenção para o contexto da produção de argumentos, ao citar a Matemática, em que o contexto é radicalmente diferente de outras atividades sociais: “Na matemática, o motivo e o objetivo da argumentação são específicos do problema a ser resolvido. [...]. Porque são as restrições do problema que determinam a escolha dos argumentos e não primeiro as crenças da pessoa a quem o argumento é dirigido” (Duval, 1999, n.p., tradução nossa).

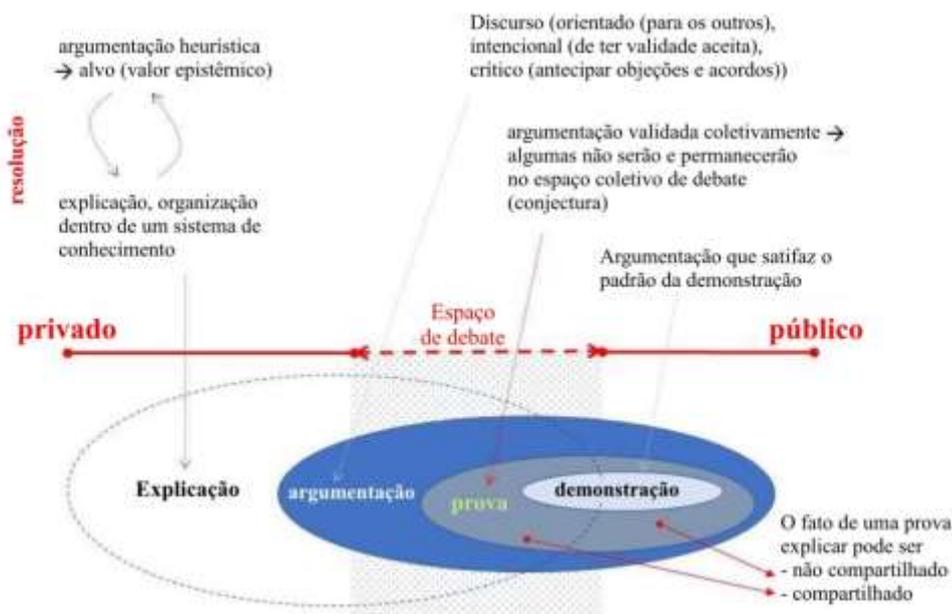
Diante deste contexto e com base em sua noção de argumentação, Duval (1992-1993, 1999) estabelece uma diferença entre retórica e heurística. A argumentação retórica, terminologia inspirada em Perelman, visa convencer um interlocutor ou a si mesmo sobre uma tomada de decisão, resolver um conflito de interesse ou chegar a um consenso sobre uma questão. Neste caso, leva-se em conta as convicções do destinatário. Já a argumentação heurística, cuja nomenclatura faz referência a uma determinada área do conhecimento, orienta a resolução de um problema favorecendo escolhas estratégicas ou apoiando a suposta validade de um enunciado (Balacheff, 2022a).

“Naturalmente, os objetivos destes dois tipos de argumentação não são incompatíveis. Podemos até dizer que é possível alcançá-los simultaneamente, mesmo que, dependendo do caso, predomine um sobre o outro” (Duval, 1992-1993, p. 51, tradução nossa). Apesar de o pesquisador mencionar que a argumentação implementada em Matemática é heurística, pela sua própria observação, acreditamos que ambas podem fazer parte do processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Contudo, não podemos discordar de Reid e Knipping (2010) sobre o fato de que a argumentação retórica, que costuma ser mais utilizada na vida cotidiana, pouco ajuda os licenciandos a compreenderem a estrutura formal e dedutiva das justificativas em Matemática, o que pode até ser uma das causas das dificuldades que eles apresentam em realizar demonstrações e em colaborar no desenvolvimento do processo dedutivo de seus (futuros) alunos.

Os próximos parágrafos são dedicados à discussão do nosso entendimento sobre o constructo teórico de Nicolas Balacheff, a partir do esquema ilustrado na Figura 1, a seguir, que foi retirado e traduzido de Balacheff (2022a). De acordo com o pesquisador, as relações entre explicação, argumentação, prova e demonstração ilustradas no esquema são esclarecidas a partir da perspectiva do indivíduo empenhado em resolver um problema e validar a sua solução. Por isso, no canto superior esquerdo, há a citação de dois conceitos empregados por Duval: argumentação heurística e valor epistêmico. Tais conceitos se articulam com a “explicação” da validade de uma afirmação, a partir da perspectiva do próprio sujeito (Balacheff, 2010). Por essa razão, tal noção está mais próxima da esfera privada. Inclusive, segundo o próprio pesquisador, um ponto importante deste novo esquema é a

[...] existência de uma fronteira entre a esfera privada e a pública. Na esfera privada, a explicação trabalha sobre os objetos e suas relações, é a base da construção da argumentação que será o meio de convencer acerca da validade da solução de um problema, seja este trabalho garantido ou não pela transformação do valor epistêmico em valor ôntico. Ultrapassar essa fronteira implica a busca de um consenso, ou seja, de um processo social que, por sua natureza, não pode garantir que os protagonistas individualmente reconheçam o caráter explicativo da argumentação - a prova - aceito coletivamente. Essa incerteza é ainda mais forte no caso da demonstração por causa de seu caráter normativo, que tem precedência sobre suas propriedades retóricas (Balacheff, 2020b, p. 832).

Figura 1 - Relação entre explicação, argumentação, prova e demonstração



Fonte: Balacheff (2020a, p. 783, tradução nossa).

Note-se que, entre as esferas privada e pública, há um espaço de debate, no qual a solução defendida pode ser aceita, modificada ou rejeitada. O esquema faz menção à conjectura como uma argumentação que está neste entre-lugar. Com aporte em Duval, Balacheff (2020b) afirma que a passagem da explicação à argumentação é imposta pela necessidade de produzir argumentos e pela aceitabilidade dos argumentos. Em vista disso, Balacheff (2020a) caracteriza a argumentação como um discurso (oral ou escrito) orientado (visa à validade de uma afirmação), crítico (analisa, apoia e defende) e intencional (visa modificar um julgamento). Fazer com que uma determinada comunidade aceite que uma argumentação estabelece a validade de uma solução altera seu status para “prova” pelo caráter público que adquire. Entre as diferentes provas, as que satisfazem uma estrutura particular validada pela comunidade de matemáticos são chamadas de demonstrações. “Elas são uma sequência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido daqueles que o precedem por meio de uma regra de dedução tomada num conjunto bem definido de regras” (Balacheff, 1987, p. 148, tradução nossa).

Ainda como base na Figura 1, chamamos a atenção para a nota no canto inferior direito, que remete à ideia de que nem todas as provas são explicativas, como as provas por indução finita e por contradição, segundo a nossa concepção.

Em nosso entendimento, o constructo teórico de Balacheff traz uma imensa contribuição para a pesquisa em Educação Matemática, pois, ao estabelecer uma distinção entre “prova” e

“demonstração” (geralmente utilizadas como sinônimos no âmbito da comunidade de matemáticos profissionais), possibilita a validação de outras argumentações. Por exemplo, uma argumentação por meio de recortes e dobraduras em Geometria pode ser validada no contexto de uma turma do Ensino Fundamental e receber o status de prova, ainda que, dificilmente, ela seria aceita pela comunidade de matemáticos.

2 Software IRaMuTeQ

O software IRaMuTeQ (*Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires*), desenvolvido pelo pesquisador francês Pierre Ratinaud, é livre e o download pode ser realizado gratuitamente no site oficial¹. No Brasil, o uso do software iniciou em 2013 e tomamos conhecimento dele por meio da publicação de Camargo e Justo (2013).

Esse software permite realizar análises estatísticas sobre dados textuais. Isto traz à tona um paradigma existente entre pesquisas quantitativas e qualitativas. Neste sentido, Camargo e Justo (2013, p. 514) evidenciam que softwares como o IRaMuTeQ contribuem para que “[...] se supere a dicotomia clássica entre quantitativo e qualitativo na análise de dados, na medida em que possibilita que se quantifique e empregue cálculos estatísticos sobre variáveis essencialmente qualitativas – os textos”.

Além disso, de acordo com Camargo e Justo (2013), o IRaMuTeQ foi inspirado no mesmo algoritmo do ALCESTE (*Analyse Lexicale par Context d'un Ensemble de Segments de Texte*) desenvolvido por Max Reinert. Optamos por utilizá-lo, pois, além de o acesso ser gratuito, o programa é ancorado na linguagem Python e no software R, possibilitando diferentes processamentos e análises estatísticas de textos, tais como: análises lexicais clássicas, pesquisa de especificidades de grupos, classificação hierárquica descendente, análises de similitude, nuvem de palavras, entre outras. Em particular, neste artigo, utilizamos as análises lexicais e de similitude para auxiliar na interpretação dos dados.

É importante destacar que vem crescendo o número de pesquisas, de diferentes áreas do conhecimento, que usaram o IRaMuTeQ. Eis alguns exemplos: na área da Enfermagem, Souza et al. (2018) utilizaram o software como ferramenta de apoio ao processamento de dados numa pesquisa sobre o trabalho de parto, em que os dados foram produzidos a partir de entrevistas semiestruturadas; na área da Psicologia, Winters, Silva e Dellazzana-Zanon (2022) investigaram os projetos de vida no início da adolescência, a partir da análise de redações dos estudantes com o auxílio do software; e, na área da Educação Matemática, Martins et al. (2022) evidenciaram como o uso do software pode contribuir para os procedimentos da metodologia Análise Textual

¹ Disponível em: <http://www.iramuteq.org>. Acesso em: 21 out. 2023.

Discursiva, a partir de uma investigação realizada com estudantes de mestrado. Em vista da revisão de literatura, a constatação foi que universidades renomadas do Brasil e do exterior têm utilizado o *software* IRaMuTeQ em suas pesquisas para realizar análises estatísticas sobre dados textuais.

3 Procedimentos metodológicos

Este artigo apresenta um recorte da primeira etapa de uma pesquisa ampla. A segunda etapa está em andamento em um estudo de doutorado. A primeira etapa deu origem a uma dissertação de mestrado (Caldato, 2018), defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), que teve como objetivo geral investigar as concepções de ingressantes em cursos de licenciatura em Matemática sobre “argumentação”, “prova” e “demonstração”. Para o desenvolvimento da dissertação, realizou-se um estudo de campo e os dados foram produzidos a partir da aplicação presencial de um questionário, composto por sete questões, a uma amostra por conveniência, durante o mês de agosto de 2017. A amostra na primeira etapa era constituída por 78 licenciandos, denotados, respectivamente, por L1, L2, ..., L78, que ingressaram no curso de Matemática no ano de 2017, distribuídos em três instituições públicas de Ensino Superior localizadas na região Sudeste, sendo um instituto federal, uma universidade estadual e uma universidade federal. É importante mencionar que todos os participantes já haviam cursado o primeiro período nas suas respectivas instituições.

A escolha por este público-alvo se deve ao fato de que, em 2017, o primeiro autor cursava o mestrado sob a orientação da segunda autora e, na época, a primeira etapa da pesquisa foi realizada com estudantes ingressantes no curso de licenciatura em Matemática. A segunda etapa está em fase de conclusão, no doutorado, com um grupo dos participantes que concluíram ou estão próximos de concluir a licenciatura, a fim de observar o desenvolvimento de cada um ao longo da graduação em relação à argumentação no ensino de Matemática.

Conforme apontado, o questionário aplicado era composto por sete questões, e este texto se debruça sobre a primeira. Para uma análise detalhada das questões 2, 4, 5 e 7, sugerimos a leitura de Caldato e Nasser (2018, 2022) e Nasser *et al.* (2023). O objetivo da primeira questão – e consequentemente deste artigo – é identificar como os estudantes ingressantes no curso de licenciatura interpretam as terminologias “argumentação”, “demonstração” e “prova” no âmbito da Matemática. Contudo, por se tratar de uma questão aberta, em que os participantes poderiam discursar livremente sobre o seu entendimento de tais noções, utilizamos *a priori* um *software* de análises estatísticas para dados textuais, a fim de apoiar a categorização das respostas apresentadas pelos participantes durante a leitura dos questionários (análise qualitativa).

Deste modo, inicialmente realizamos as análises lexical clássica e de similitude (ou de semelhanças) no *software* IRaMuTeQ. Na análise lexical, o programa identifica a frequência de palavras (ou formas) no corpus textual e as reduz com base em suas raízes (lematização). O corpus é construído pelo pesquisador e consiste no conjunto de textos que se pretende analisar. No caso desta questão, elaboramos um corpus para cada uma das terminologias (argumentação, demonstração e prova), segundo as definições apresentadas pelos licenciandos. Além disso, esta análise cria um dicionário das formas reduzidas, das quais é possível identificar o número de hápax (palavras com frequência um) e a quantidade de formas ativas e suplementares, conforme as classes gramaticais selecionadas (Camargo; Justo, 2013). As classes definidas como ativas foram: adjetivo, advérbio, formas não reconhecidas, nome comum e verbo.

Posteriormente, submetemos cada corpus à análise de similitude, a qual

[...] se baseia na teoria dos grafos, possibilita identificar as coocorrências entre as palavras e seu resultado traz indicações da conectividade entre as palavras, auxiliando na identificação da estrutura de um corpus textual, distinguindo também as partes comuns e as especificidades em função das variáveis ilustrativas (descritivas) identificadas na análise (Camargo; Justo, 2013, p. 516).

Essa análise permite visualizar a relação entre as palavras e a sua conectividade dentro de cada comunidade e a ligação entre as várias comunidades. Por exemplo, nos dendogramas apresentados nas próximas seções, os quais ilustram as relações entre as classes definidas como ativas, os vocábulos estão organizados pelo tamanho da letra, de acordo com a sua frequência no corpus textual. Deste modo, foi possível identificar *a priori*, como os sujeitos articulavam algumas formas para conceituar as terminologias “argumentação”, “demonstração” e “prova”. É importante destacar que, nessa análise, o *software* selecionou apenas as formas reduzidas ativas e, por essa razão, as formas reduzidas suplementares foram descartadas.

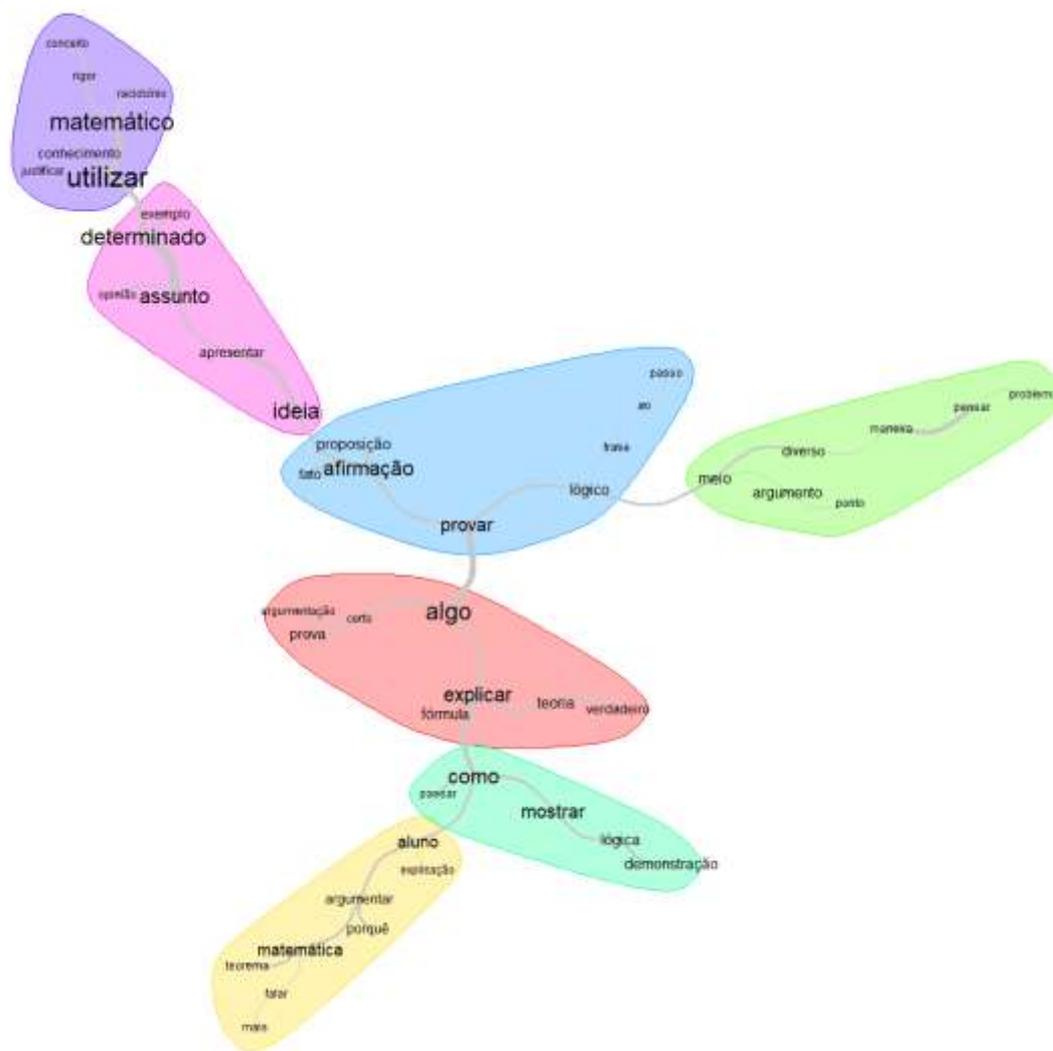
4 Significados atribuídos pelos licenciandos para “Argumentação”

Conforme descrito na fundamentação teórica e sustentado por Nicolas Balacheff, a argumentação em Educação Matemática pode ser caracterizada como sendo um discurso orientado, crítico e intencional, destinado a convencer um sujeito sobre a verdade de uma proposição, o qual pode aceitar, recusar ou discutir as razões apresentadas. Entretanto, como os licenciandos que participaram da pesquisa interpretam o significado de argumentação em Matemática?

Para tentarmos responder a essa pergunta, inicialmente realizamos uma análise de similitude (Figura 2) no *software* IRaMuTeQ. O corpus (referente à argumentação) foi constituído por 76 textos (dois licenciandos não responderam), no qual emergiram 912 ocorrências (palavra ou formas), sendo 356 palavras distintas, reduzidas por lematização a 281 formas (ativas ou secundárias), das quais 153 (ou 54,4%) ocorreram uma única vez. Deste modo, constatou-se a

existência de quatro palavras que mais se destacaram nos discursos dos participantes: “Utilizar”, “Determinado”, “Assunto” e “Algo”. Delas se ramificaram outras expressões representativas, tais como: “Matemático”, “Ideia”, “Afirmação”, “Provar”, “Explicar”, “Como” e “Mostrar”.

Figura 2 - Dendograma² de similitude de “argumentação”



Fonte: elaborado pelos autores.

É importante destacar que as sete comunidades (em cores distintas) indicadas na Figura 2 auxiliaram na análise qualitativa dos questionários, pois, ao partir para a leitura, já tínhamos uma expectativa do que poderíamos encontrar nas respostas dos participantes, facilitando, assim, a

² Para a análise, o *software* selecionou 49 formas reduzidas ativas com ocorrências maiores ou iguais a três, as quais listamos com as respectivas frequências entre parênteses: Utilizar (12); matemático, algo (10); ideia, determinado, como, afirmação (9); explicar, assunto (8); provar, mostrar (7); prova, matemática, aluno (6); teoria, proposição, meio, lógico, lógica, fórmula, demonstração, argumento (5); verdadeiro, teorema, porquê, passo, maneira, fato, exemplo, diverso, conhecimento, argumentar, apresentar (4); rigor, raciocínio, problema, ponto, pensar, passar, opinião, mais, justificar, frase, falar, explicação, conceito, certo, argumentação, ao (3).

categorização. Deste modo, após o uso do *software* e da leitura dos questionários, elencamos sete diferentes significados atribuídos à argumentação (destacam-se entre parênteses, quando possível, a(s) cor(es) correspondente(s) na Figura 2), os quais descrevemos no Quadro 2 com suas respectivas frequências:

Quadro 2 - Significados atribuídos para “argumentação”

Significados	Frequência
Problematizar/debater um determinado assunto/ideia (rosa)	19
Mostrar/provar algo (azul, verde-água)	11
Explicação (salmão)	10
Encadeamento lógico (roxo)	9
Raciocínio matemático (verde-claro)	5
Convencimento (amarelo)	3
Outros	19
Não definiram	2
TOTAL	78

Fonte: elaborado pelos autores.

Nota-se que os três significados com maior frequência descritos no Quadro 2 estão em consonância com as comunidades do dendograma de similitude (Figura 2). Uma das categorias que mais se destacou, com 24,4% da amostra, foi associar argumentação ao sentido de problematizar/debater um determinado assunto, ideia ou teoria. Isso pode ser observado nos fragmentos a seguir, que foram transcritos dos questionários:

L32: É a apresentação de uma ideia ou ponto de vista sobre determinado assunto.

L34: É uma discussão em que uma pessoa expõe observações e cria hipóteses para tentar provar algo.

L53: Comentar e discorrer, sem necessidade de provar ou demonstrar.

Observa-se que o L53 fez questão de evidenciar uma distinção entre argumentação e prova/demonstração. Entretanto, outros não apresentaram tal diferença. Para onze respondentes, o radical³ *argument-* é equivalente a mostrar, provar ou justificar algo, como, por exemplo, para o L43: *É a partir de um teorema que se prova através da lógica matemática se tal teorema ou teoria é verdadeiro ou falso.*

Diferentemente da interpretação adotada neste artigo, dez licenciandos definiram argumentação como sinônimo de explicação. O L28, por exemplo, dissertou: *Utilizar de seus conhecimentos para a explicação de um tema.* L22, por sua vez, definiu como *Explicar, por meio de desenhos, procedimentos e ideias o motivo de algo ser ou não verídico.* É importante ressaltar que os

³ Radical é o elemento comum de palavras cognatas, também chamadas de palavras da mesma família. É responsável pelo significado básico da palavra.

PCN evidenciam uma diferença entre argumentação e explicação, ao considerarem que “[...] a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la” (Brasil, 1998a, p. 70). E isso corrobora com as nossas concepções, pois consideramos que uma explicação não visa necessariamente convencer alguém, ao contrário da argumentação, de acordo com o construto teórico de Balacheff.

Verificou-se ainda que nove participantes associaram argumentação ao significado de encadeamento lógico (ou dedução), conforme observamos na resposta do L55: *São frases/afirmações com o intuito de mostrar ao leitor algum passo de uma demonstração*. Em nossa concepção, a relação entre argumentação e raciocínio dedutivo, desenvolvida por estes participantes, aproxima-se da noção de argumentação heurística proposta por Duval, uma vez que a construção de argumentos dedutivos é algo que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais.

Além disso, cinco participantes associaram essa terminologia ao raciocínio matemático, como afirmou o L62: *Analisar a validade de informação, com base em raciocínios matemáticos abstratos ou concretos*. E apenas três licenciandos se referiram à argumentação com o significado de convencer algo a alguém, que consiste na interpretação adotada neste estudo. O L57, por exemplo, dissertou: *Trazer fatos para tentar convencer outra pessoa a respeito de alguma informação*.

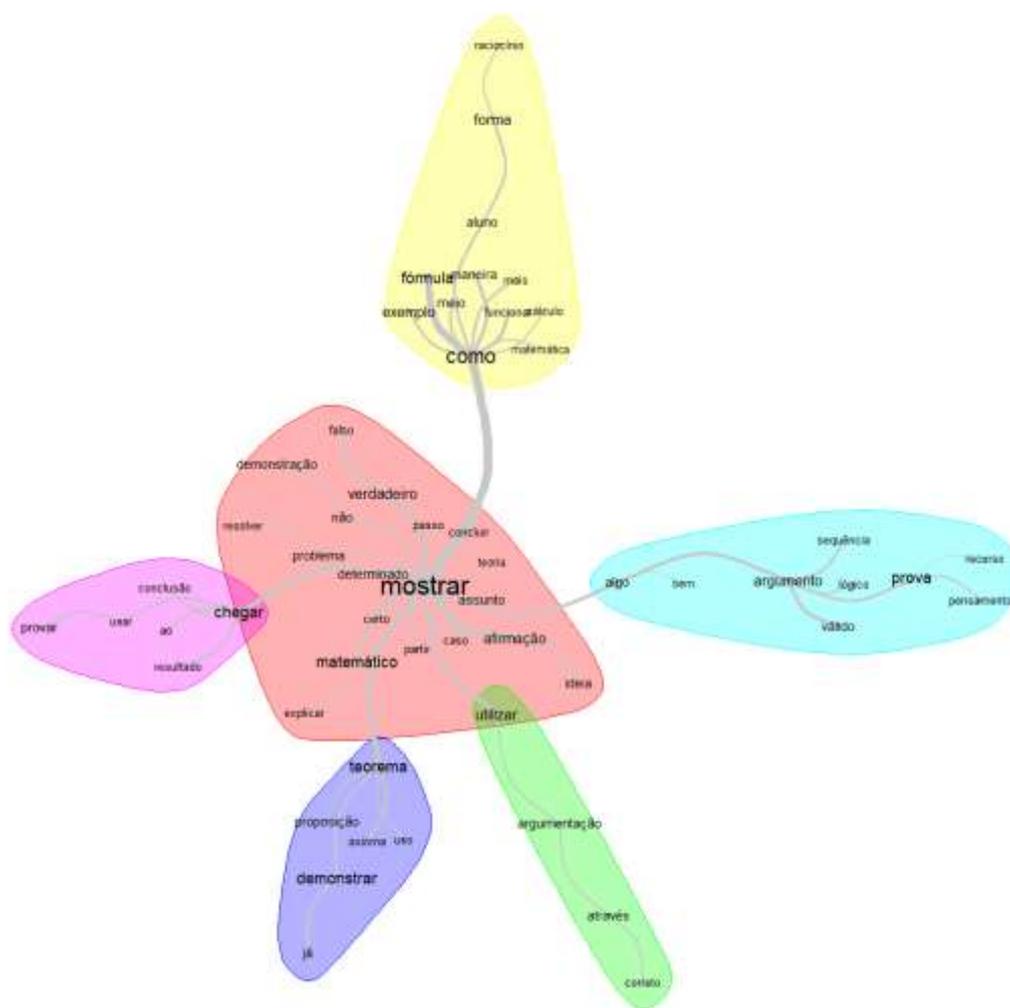
Por fim, em “Outros” – outra categoria com 24,4% da amostra –, reunimos os significados para argumentação que tiveram frequência de no máximo dois, os quais não detalhamos neste texto. Apenas para mencionar três exemplos, o estudante L51 afirmou que argumentar consiste na parte inicial da prova; já o L75 a associou às possibilidades de solução de um problema matemático; e o L33 se referiu à utilidade/aplicabilidade de certo conteúdo matemático. Observamos ainda que dois licenciandos não souberam descrever um significado para argumentação.

5 Significados atribuídos pelos licenciandos para “Demonstração” e “Prova”

Em consonância com as ideias de Balacheff, entendemos que uma demonstração é composta por uma sequência de afirmações articuladas, segundo uma lógica dedutiva preestabelecida e que uma prova consiste numa argumentação validada coletivamente. Além disso, consideramos que toda demonstração é uma prova e que toda a prova é uma argumentação, embora as recíprocas não sejam verdadeiras. Entretanto, nesta seção, buscamos identificar as interpretações apresentadas pelos licenciandos no âmbito da Matemática. Para isso, iniciaremos a análise das respostas atribuídas à demonstração e posteriormente à prova. Ao final, apresentamos um quadro comparativo entre ambas.

Ao compilar as definições atribuídas pelos licenciandos à demonstração no *software* IRaMuTeQ, constatou-se por meio da análise de similitude que o verbo “Mostrar” se destacou nas respostas, ocupando o centro do dendograma (Figura 3) e que a partir dele se ramificaram outras terminologias e comunidades. O corpus (referente à demonstração) foi constituído por 77 textos (um licenciando afirmou que não sabia responder), no qual emergiram 1.048 ocorrências (palavra ou formas), sendo 363 palavras distintas, reduzidas por lematização a 274 formas (ativas ou secundárias), das quais 155 (ou 56,6%) eram hápax.

Figura 3 - Dendograma⁴ de similitude de “demonstração”



Fonte: elaborado pelos autores.

⁴ Para a análise, o *software* selecionou 56 formas reduzidas ativas com ocorrências maiores ou iguais a três, as quais listamos com as respectivas frequências entre parênteses: mostrar (30); como (20); teorema, fórmula, chegar (12); prova, matemático, demonstrar (11); verdadeiro, utilizar, argumento (10); forma, exemplo (9); algo, afirmação (8); provar, proposição, meio (7); não, demonstração, assunto, argumentação, aluno (6); válido, problema, maneira, já, ideia, determinado, através, ao (5); usar, resultado, recurso, raciocínio, passo, lógico, funcionar, falso, conclusão, certo, axioma (4); uso, teoria, sequência, resolver, pensamento, partir, matemática, mais, explicar, cálculo, correto, concluir, caso, bem (3).

Posteriormente à análise no IRaMuTeQ, esperávamos encontrar na leitura dos questionários uma gama de definições que remetesse à ideia de mostrar/provar algo, em consonância com a Figura 3. Esse fato foi corroborado de acordo com os índices do Quadro 3, que apresenta quatro diferentes significados atribuídos à demonstração com suas respectivas frequências (destacam-se entre parênteses, quando possível, a(s) cor(es) correspondente(s) na Figura 3).

Quadro 3 - Significados atribuídos para “demonstração”

Significados	Frequência
Validar um resultado / Mostrar algo (vermelho, rosa, azul)	51
Processo/desenvolvimento da prova (amarelo, verde-água, verde-claro)	7
Resolução de problemas (vermelho)	5
Outros	14
Não definiram	1
TOTAL	78

Fonte: elaborado pelos autores.

Nota-se que o maior percentual dos licenciandos (65,4% da amostra) conceituou demonstração com o significado de validar um resultado ou mostrar que algo (teorema, fórmula, afirmação, etc.) é verdadeiro, conforme observamos nas respostas a seguir:

L44: Conjunto de argumentos que consegue partir de fatos já conhecidos e demonstrados e mostrar se outra afirmação é verdadeira ou falsa (em alguns casos, indeterminada).

L45: Mostrar todos os passos e etapas necessárias para sair de algo que se conhece e se tem bem definido (provado) e concluir algo que ainda não se sabe/não é provado.

L61: Sequência lógica de argumentos com a ideia de mostrar a validade de uma sentença, fórmula ou afirmação.

Nota-se também que a resposta do L61 se assemelha à conceituação que propomos neste estudo com base nos construtos teóricos de Balacheff, exceto pela parte em que ele restringe a demonstração à função de verificação. Em De Villiers (1999), é possível ler em detalhes sobre as demais funções da prova (explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual).

Todavia, apesar de a maioria da amostra ter associado demonstração ao significado de validar uma afirmativa, como vimos no Quadro 3, foi possível identificar diferentes níveis de formalidade e de rigor para atingir este fim. É importante evidenciar que, de acordo com Balacheff, uma demonstração envolve construções cognitivas e linguísticas complexas, tais como o uso do raciocínio lógico dedutivo e da linguagem matemática formal. Para ilustrar os diferentes níveis de formalidade e de rigor mencionados anteriormente, consideram-se dois exemplos. Na visão do L59, uma demonstração consiste em *mostrar que uma afirmação é*

verdadeira a partir de axiomas e teoremas, ou seja, resultados provados ou aceitos como verdades absolutas. Já o L21 é bem menos rigoroso com relação ao modo de validar uma afirmação, pois, para ele, basta exibir *algum exemplo que demonstre a aquela pessoa que a ideia testada sobre aquele assunto tem algum fundamento de verdade*.

Além disso, verificou-se que alguns discentes associam a demonstração a recursos algébricos, conforme se nota na resposta do L2: *A demonstração já está ligada em mostrar de onde que veio determinada fórmula em outras palavras, o porquê que foi feita e como foi pensada, em manipulações algébricas*. Já outros a associaram a recursos geométricos, conforme a definição do L25: *Mostrar de forma visual a outra pessoa com o âmbito de ela conseguir compreender (o passo a passo)*.

Para sete discentes, uma demonstração está atrelada ao processo ou desenvolvimento da prova, visto que nessas circunstâncias as definições propostas pelos licenciandos, em geral, fazem menção à prova como uma etapa de conclusão, ou seja, ao resultado da demonstração. Esse fato é caracterizado na resposta do L51 (Figura 4), em que estabelece uma hierarquia entre as terminologias abordadas, começando pela argumentação (introdução), passando pela demonstração (desenvolvimento) e finalizando com a prova (conclusão).

Figura 4 - Resposta do licenciando L51

Dê a sua interpretação para os seguintes termos no âmbito da Matemática:

- Argumentação: *Parte inicial da prova, é a justificativa menos criteriosa do passo.*
- Demonstração: *Detalhamento da argumentação*
- Prova: *Conclusão da demonstração, inclui tudo visto anteriormente e da o veredito da afirmação proposta*

Fonte: dados da pesquisa.

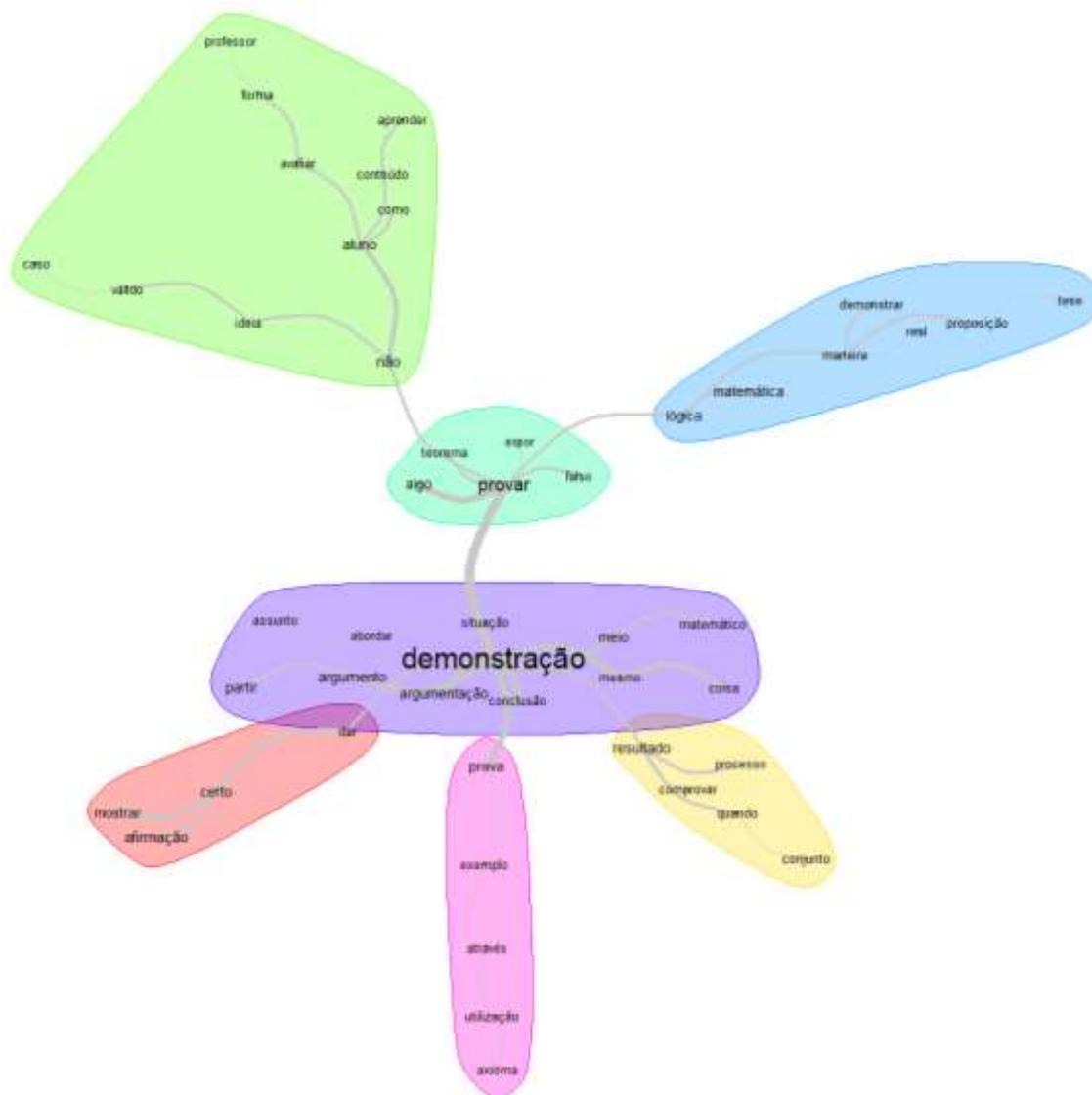
Observou-se ainda que cinco licenciandos interpretam uma demonstração com o significado de resolução de problemas, como sugere a resposta da L29: *Situação geral de determinado assunto, que engloba todas as possibilidades de resolução*.

Por fim, na categoria “Outros”, reunimos os significados para demonstração que tiveram frequência de no máximo dois, as quais não detalharemos neste artigo.

Com relação às definições atribuídas pelos licenciandos à prova, inicialmente também realizamos a análise de similitude (Figura 5), verificando que a palavra “Demonstração” se

destacou nas respostas dos participantes, diretamente ligada a “Provar”, e a partir delas se ramificaram outras nomenclaturas e comunidades. Destaca-se que o *corpus* (referente à prova) foi constituído por 77 textos (um licenciando deixou em branco), no qual emergiram 905 ocorrências, sendo 345 palavras distintas, reduzidas em 274 formas (ativas ou secundárias), das quais 154 (ou 56,2%) eram hápax.

Figura 5 - Dendograma⁵ de similitude de “prova”



Fonte: elaborado pelos autores.

⁵ Para a análise, o *software* selecionou 49 formas reduzidas ativas com ocorrências maiores ou iguais a três, as quais listamos com as respectivas frequências entre parênteses: demonstração (32); provar (13); não (9); prova, aluno (8); argumento, afirmação (7); partir, mostrar, lógica, algu (6); resulta, meio, matemática, forma, certo, avaliar, argumentação (5); válido, quando, mesmo, matemático, maneira, ideia, demonstrar, dar, conteúdo, conclusão, como, coisa (4); utilização, tese, teorema, situação, real, proposição, professor, processo, falso, expor, exemplo, conjunto, comprovar, caso, axioma, através, assunto, aprender, aborda (3).

Após a compilação dos dados, chamou a nossa atenção, na Figura 5, a comunidade situada no canto superior esquerdo, em que se destacam as palavras “Aluno”, “Avaliar”, “Forma” e “Professor”, sugerindo que alguns licenciandos conceituaram prova como instrumento de avaliação. Esse fato foi evidenciado durante a leitura dos questionários, em que observamos seis diferentes significados para prova (destacam-se entre parênteses, a(s) cor(es) correspondente(s) na Figura 5), os quais apresentamos no Quadro 4 com suas respectivas frequências:

Quadro 4 - Significados atribuídos para “prova”

Significados	Frequência
Validar um resultado / Mostrar algo (roxo, verde-água, vermelho, azul)	31
Instrumento de avaliação (verde-claro)	12
Conclusão da demonstração (amarelo)	10
Sinônimo de demonstração (roxo)	10
Verificação numérica (rosa)	3
Outros	11
Em branco	1
TOTAL	78

Fonte: elaborado pelos autores.

Aproximadamente 40% dos respondentes associaram prova ao ato de validar um resultado ou mostrar/provar/demonstrar que uma afirmação é verdadeira, conforme observamos nas seguintes respostas:

L78: Mostrar por argumentação matemática que certa ideia ou afirmação é válida para um número N de casos.

L44: Conjunto de processos lógicos que quando aplicados a afirmações básicas permite elaborar, a partir delas, outras mais complexas, que carregam um resultado geral.

L45: Uso de argumentos corretos, com uma perspectiva de lógica matemática e o uso de um sistema axiomático, para concluir algo.

Vale destacar as duas últimas respostas, pois apenas cinco participantes (entre eles, o L44 e o L45) relacionaram explicitamente a prova à lógica matemática. Além disso, é importante ressaltar que, apesar de os Quadros 3 e 4 apresentarem o significado de “Validar um resultado/Mostrar algo” tanto para demonstração quanto para prova, respectivamente, isso não significa que os licenciandos considerem essas terminologias como sinônimas. Até porque, no Quadro 4, criou-se uma categoria intitulada “Sinônimo de demonstração”, em que incluímos apenas os sujeitos que escreveram isso explicitamente nas suas respostas. Para uma melhor compreensão, apresentamos um exemplo (Figura 6) com base na resposta do L44:

Figura 6 - Resposta do licenciando L44

- Demonstração: conjunto de argumentos que consegue partir de fatos já conhecidos e demonstrados e mostrar se outra afirmação é verdadeira ou falsa (em alguns casos, indeterminada).
- Prova: conjunto de premissas lógicas que quando aplicadas a afirmações básicas permite elaborar, a partir delas, outras mais complexas, que carregam um resultado geral.

Fonte: dados da pesquisa.

Note que apesar do L44 se referir à demonstração e à prova com o significado de validar/mostrar algo, as conceituações propostas são notoriamente distintas. Por isso, não consideramos que eles adotam essas terminologias como sinônimas. Além disso, emerge também a percepção de que eles concebem a prova como uma forma mais rigorosa e formal de validar uma afirmativa, na direção contrária do que é proposto no constructo teórico de Balacheff.

Ainda com relação aos licenciandos que associaram a prova ao ato de validar um resultado, observamos que três sujeitos a definiram como sendo a *união do argumento com demonstração para provar uma proposição, corolário, teorema, etc.* (Resposta do L38).

O segundo significado mais associado à prova foi de instrumento de avaliação (teste ou exame), que emergiu nas respostas de doze participantes. Entre elas, a resposta do L24: *É um recurso que deve existir para você professor ter uma ideia de como a sala está indo, quais conhecimentos ela está conseguindo absorver, saber das dificuldades da sala e trabalhar em cima disso.* A pesquisa de Aguilar Junior (2012) também evidenciou um resultado semelhante, pois ao investigar as definições de 60 professores para “prova matemática”, o pesquisador constatou que, na segunda posição, com 25% da amostra, a prova estava relacionada com avaliação. Podemos especular que essa concepção equivocada se deve aos diversos significados de prova na Língua Portuguesa, tais como: teste avaliativo, competição esportiva, degustação, situação aflitiva, experiência científica, entre outros.

Na visão de dez participantes, a prova está associada ao resultado ou à conclusão de uma demonstração, conforme é possível observar nos fragmentos a seguir, os quais evidenciam a demonstração como uma etapa do desenvolvimento da prova:

L12: É o resultado final de uma argumentação, aliada a uma demonstração que quando concretizadas comprovam tal ponto de vista.

L55: A prova é o que segue e/ou a consequência da demonstração, ou seja, a conclusão.

Já observamos que, no contexto da comunidade de matemáticos, as terminologias “demonstração” e “prova” são consideradas sinônimas. Entretanto, apenas dez licenciandos afirmaram isso explicitamente em suas respostas. Logo, podemos conjecturar que esse índice é mais um indicativo de que, para a maior parte da nossa amostra, existe diferença entre demonstração e prova, especialmente, com relação ao rigor e ao nível de formalidade.

Em vista disso e instigados pela conjectura descrita anteriormente, buscamos sintetizar e comparar no Quadro 5 algumas definições dos licenciandos que acreditam haver diferenças entre demonstração e prova.

Quadro 5 - Diferenças entre demonstração e prova, nas visão dos licenciandos⁶

Participante	Demonstração	Prova
L15	Mostrar utilizando números ou letras.	Provar, através do desenvolvimento de teoremas e fórmulas.
L25	Mostrar de forma visual a outra pessoa.	Uma maneira de demonstrar que alguma coisa é real.
L35	Mostrar como se faz.	Mostrar que da forma que foi demonstrada funciona.
L38	Recursos para fortalecer sua prova.	União do argumento com demonstração para provar uma afirmação.
L39	Uso de axiomas e teoremas já provados para demonstrar a tese.	Resultado final do processo.
L51	Detalhamento da argumentação.	Conclusão da demonstração.
L64	Utilizar axiomas e teoremas já provados para justificar uma afirmação.	Utilizar majoritariamente axiomas para provar uma afirmação.
L68	São os passos feitos para que se chegue a uma conclusão.	É a junção dos argumentos, da demonstração e da conclusão.
L70	Exposição da prova de alguma proposição feita.	Utilização e encadeamento de proposições para mostrar algo.
L71	Forma de validar uma proposição.	Forma de validar um teorema.
L73	Demonstrar com figuras o raciocínio que leva à prova.	É mostrar algebricamente a tese a partir da hipótese.
L76	É a utilização de exemplos e métodos para chegar num resultado.	É a maneira lógica e sistemática de demonstrar um determinado assunto.
L78	Mostrar uma afirmação por raciocínio lógico-matemático.	Mostrar por argumentação matemática.

Fonte: elaborado pelos autores.

Com base no Quadro 5, podemos observar a existência de contrastes relacionados ao rigor e a formalidade, visto que a maioria das conceituações sugere que a prova estaria relacionada a

⁶ Para elaborar o Quadro 5, consideramos apenas os licenciandos que associaram demonstração aos significados “Validar um resultado/Mostrar algo” ou “Processo/desenvolvimento da prova” (Quadro 3), assim como os participantes que relacionam prova com “Validar um resultado/Mostrar algo” ou “Conclusão da demonstração” (Quadro 4).

algo mais formal ou a uma possível generalização, enquanto a demonstração estaria mais relacionada à informalidade ou a uma etapa que antecede a prova.

Verificou-se ainda que três discentes associaram a prova à verificação numérica (ou prova real), conforme dissertou o L72: *A substituição das incógnitas da demonstração por valores numéricos [...]*. Na categoria “Outros”, agrupamos os significados para prova que tiveram frequência de no máximo dois, os quais não detalharemos neste texto. E somente um licenciando deixou a resposta em branco.

Considerações Finais

Neste artigo buscamos identificar os significados atribuídos às terminologias “argumentação”, “prova” e “demonstração” na visão de 78 estudantes ingressantes no curso de licenciatura em Matemática, por meio da análise de dados textuais a partir do *software* IRaMuTeQ.

É possível afirmar que o significado de argumentação não é uma unanimidade entre os participantes da pesquisa, visto que houve várias interpretações, sendo que muitas delas foram descritas com significados equivalentes às terminologias “prova” e “demonstração” (mostrar/provar algo) ou sem nenhuma correlação com a interpretação adotada neste texto.

Além disso, apesar de o maior percentual dos participantes ter associado tanto “demonstração” quanto “prova” ao significado de validar um resultado, observou-se a existência de contrastes relacionados ao rigor e à formalidade nas conceituações propostas pelos licenciandos para essas terminologias no âmbito matemático. A partir da análise dos dados, foi possível inferir que, na visão dos ingressantes, a prova estaria relacionada a algo mais formal ou a uma possível generalização, enquanto a demonstração estaria relacionada a algo mais informal ou a uma etapa que antecede a prova.

Contudo, é importante destacar que Ferreira (2016) obteve resultados antagônicos ao investigar a conceituação de 45 licenciandos não ingressantes (a amostra era constituída por licenciandos que cursavam do 3º ao 14º semestre). Primeiramente, pelo fato de a maioria (21 participantes) afirmar que não existe diferença entre prova e demonstração, sendo que outros 19 consideraram que há diferença e cinco não responderam. Dos licenciandos que mencionaram haver diferença entre tais terminologias, a conclusão descrita pela pesquisadora também destoou das nossas análises, como é possível observar na seguinte citação:

Podemos observar que na maioria das concepções apresentadas a prova está mais relacionada à informalidade, ao próprio convencimento por meio de argumentos empíricos. Já a demonstração está na maioria das vezes relacionada a algo mais formal ou a uma generalização. Na prova, segundo os relatos, o aluno se convence que uma afirmação é verdadeira; na demonstração convence os outros (Ferreira, 2016, p. 83).

Isso sugere que, independentemente de serem ingressantes ou não, o significado das terminologias “argumentação”, “prova” e “demonstração” em Matemática não é consensual (e às vezes nem compreensível) entre os próprios licenciandos. Além disso, as interpretações que emergiram em nossa investigação divergem do construto teórico proposto por Balacheff (2022a).

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento e incentivo a esta pesquisa. Agradecemos, ainda, aos licenciandos que gentilmente participaram desta pesquisa.

Referências

- AGUILAR JÚNIOR, Carlos Augusto. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental**. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro/RJ, 2012. Disponível em: https://pemat.im.ufrj.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/MSc_46_Carlos_Augusto_Aguilar_Junior.pdf. Acesso em: 19 set. 2023.
- AGUILAR JÚNIOR, Carlos Augusto; CALDATO, João Carlos. Raciocínio Argumentativo em Matemática no PISA e na BNCC: uma investigação com estudantes da Educação Básica. **Boletim GEPEM**, n. 78, p. 21-38, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/449>. Acesso em: 30 out. 2023.
- AZEVEDO, Isabel. Cristina Michelan de; SANTOS, Maristela Félix dos; CALHAU, Soade Pereira Jorge; LEAL, Vanesca Carvalho; PIRIS, Eduardo Lopes. **Dez questões para o ensino de argumentação na Educação Básica: fundamentos teórico-práticos**. Prefácio de Paulo Roberto Gonçalves-Segundo. 1. ed. Campinas: Pontes, 2023.
- BALACHEFF, Nicolas. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 147-176, 1987.
- BALACHEFF, Nicolas. Is argumentation an obstacle ? Invitation to a debate... **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof**, 1999. Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html>. Acesso em: 24 set. 2023.

BALACHEFF, Nicolas. Bridging knowing and proving in Mathematics: a didactical perspective. In: Hanna G.; Jahnke H. N., Pulte H. (Eds.). **Explanation and Proof in Mathematics**. Heidelberg: Springer, 2010. p. 115-135.

BALACHEFF, Nicolas. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. Tradução: Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo/SP, v. 24, n. 1, p. 770-815, 2022a. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57664>. Acesso em: 20 set. 2023.

BALACHEFF, Nicolas. Controle, prova e demonstração: três regimes de validação. Tradução: Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo/SP, v. 24, n. 1, p. 816-871, 2022b. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57668>. Acesso em: 20 set. 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília/DF: MEC/SEF, 1998a. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 19 set. 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio**. Brasília/DF: MEC/SEF, 1998b. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 30 out. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília/DF, 2018. 595 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 set. 2023.

CALDATO, João. **Argumentação, prova e demonstração: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática**. 2018. 218 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://pemat.im.ufrj.br/index.php/pt/producao-cientifica/dissertacoes/2018/237-argumentacao-prova-e-demonstracao-uma-investigacao-sobre-as-concepcoes-de-ingressantes-no-curso-de-licenciatura-em-matematica>. Acesso em: 23 jan. 2024

CALDATO, João; NASSER, Lilian. Argumentação e provas em Geometria: uma investigação com licenciandos ingressantes. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá/MT. **Anais [...]**, Cuiabá, 2023. p. 1-15. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>. Acesso em: 30 out. 2023.

CALDATO, João Carlos; NASSER, Lilian. Interpretando e avaliando argumentações: uma análise com licenciandos ingressantes de Matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 42, n. 2, p. 25-44, jul./dez., 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4208>. Acesso em: 30 out. 2023.

CALDATO, João; UTSUMI, Miriam Cardoso; NASSER, Lilian. Argumentação e Demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. **Triângulo**, Uberaba, v. 10, n. 2, p. 74-93, jul./dez. 2017. Disponível em: <https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583>. Acesso em: 19 set. 2023.

CAMARGO, Brígido Vizeu; JUSTO, Ana Maria. IRAMUTEQ: Um software gratuito para análise de dados textuais. **Temas em Psicologia**, Ribeirão Preto/SP, v. 21, n. 2, p. 513-518, dez. 2013. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/tp/v21n2/v21n2a16.pdf>. Acesso em: 30 out. 2023.

COSTA, Monize Barros Lima. **A argumentação de alunos do Ensino Fundamental na solução de problemas envolvendo expressões aritméticas**. 2022. 190 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, 2022. Disponível em: <https://ri.ufs.br/handle/riufs/16753>. Acesso em: 23 jan. 2024

DE VILLIERS, Michael. The role and function of proof with Sketchpad. In: DE VILLIERS, Michael. **Rethinking proof with Sketchpad**. Emeryville/CA: Key Curriculum Press, 1999. p. 3-10.

DUVAL, Raymond. Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? **Petit x**, n. 31, p. 37-61, 1992-1993.

DUVAL, Raymond. Questioning argumentation. **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof**, 1999. Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html>. Acesso em: 20 set. 2023.

FERREIRA, Maridete Brito Cunha. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo/SP, 2016. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/18952>. Acesso em: 30 out. 2023.

KNUTH, Eric. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 5, p. 61-88, 2002.

KRAKECKER, Liana. **Validações matemáticas produzidas por alunos do nono ano do Ensino Fundamental: desafios e possibilidades**. 2022. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4666>. Acesso em: 23 jan. 2024

MARTINS, Kaique Nascimento; PAULA, Marlúbia Corrêa; GOMES, Larissa Pinca Sarro; SANTOS, Jéferson Evangelista dos. O software IRaMuTeQ como recurso para a análise textual discursiva. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 10, n. 24, p. 213-232, abr./ago. 2022. Disponível em: <https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/383>. Acesso em: 24 out. 2023

NASSER, Lilian; CALDATO, João Carlos; SILVA, Ana Luiza Barbosa Cardoso; AGUILAR JÚNIOR, Carlos Augusto. Argumentação e provas em Matemática: o que dizem os licenciandos ingressantes? In: COMITÊ INTERAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2023, Lima, Peru. **Anais [...]**, República Dominicana, 2023. p. 31-38. Volume 10: Educação Matemática nas Américas – Investigação. Disponível em: <https://ciaem-iacme.org/memorias-xvi-ciaem>. Acesso em: 30 out. 2023.

REID, David; KNIPPING, Christine. **Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching**. Rotterdam: Sense Publishers, 2010.

SOUZA, Marli Aparecida Rocha de; WALL, Marilene Loewen; HULER, Andrea Cristina de Morais Chaves; LOWEN, Ingrid Margareth Voth; PERES, Aida Maris. The use of IRAMUTEQ software for data analysis in qualitative research. **Revista da Escola de Enfermagem da USP**, São Paulo/SP, v. 52, p. 1-7, 2018. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/reeusp/article/view/155037>. Acesso em: 24 out. 2023.

- SOUZA, Maria Estela Conceição de Oliveira de. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar**: o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. 2009. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11429>. Acesso em: 23 jan. 2024.
- THOMPSON, Alba. Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: GROUWS, Douglas (Ed.). **Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning**: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston/VA: NCTM, 1992.
- VARGHESE, Thomas. Concept maps to assess student teachers' understanding of mathematical proof. **The Mathematics Educator**, v. 12, n. 1, p. 49-68, 2009.
- WINTERS, Christian; SILVA, Andressa Melina Becker da; DELLAZZANA-ZANON, Letícia Lovato. Análise de projetos de vida no início da adolescência através do software IRaMuTeQ. **Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación**, v. 9, n. 1, p. 117-136, 2022. Disponível em: <https://revistas.udc.es/index.php/reipe/article/view/reipe.2022.9.1.9029>. Acesso em: 24 out. 2023.